DEVOIR COMMUN – MATHÉMATIQUES – PREMIÈRE STMG –

Durée de l'épreuve : 2 heures

Le sujet comporte 7 pages.
Seule l'annexe est à rendre avec la copie.

Les calculs doivent être détaillés. Les calculatrices sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur, **mais les échanges sont interdits** !

Les exercices sont indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — d'après Dimathème p. 31 n° 22

5 points

Un restaurant sert 300 couverts par service, en proposant un menu à 16 € et un à 24 €. Pour l'inauguration de son restaurant, le gérant offre à chacun de ses clients, soit un café, soit un apéritif.

- 60 % des clients ont choisi un café, les autres un apéritif ;
- 75 % des clients qui ont choisi un menu à 24 € ont pris un café.
- La moitié des clients ont choisi un menu à 24 € et ont pris un café ;

Cette situation peut être représentée dans le tableau donné en **Annexe**

Exercice 1.

	A	B	C	D
1		Menu à 16 €	Menu à 24 €	Total
2	Clients ayant choisi un café	30 ②	150 ③	180
3	Clients ayant choisi un apéritif	70	50 ⑤	120 ①
4	Total	100	200 ④	300

1. a) Expliquer comment a été trouvé le nombre 180 en cellule D2.

on calcule 60 % des clients : $\frac{60}{100} \times 300 = 180$

b) Compléter le tableau en détaillant les calculs de la colonne C.

①

② *La moitié des clients…* donc $\frac{300}{2} = 150$

③

④ *75 % des clients qui ont choisi un menu à 24 € ont pris un café.* donc 75 % de C4 = 150 c'est à dire

$\frac{75}{100} \times C4 = 150$

$0,75 \times C4 = 150$

$C4 = \frac{150}{0,75} = 200$

2. On note A la sous population des clients ayant choisi un apéritif et M la sous population des clients ayant choisi le menu à 16 €.

a) Définir par une phrase la sous population : $A \cap M$.

$A \cap M$ représente les clients ayant prix un menu à 16 € **et** un apéritif.

Dans la suite, les résultats des calculs seront donnés en pourcentage et arrondi à l'entier.

b) Quel pourcentage du nombre total de clients représente la population A ?

120 clients parmi les 300 soit $\frac{120}{300} = 0,4 = 40\,\%$

c) Quel pourcentage du nombre total de clients représente la sous-population $A \cap M$?

$p_{A \cap M} = \frac{70}{300} \simeq 0,23$ soit environ 23 %.

d) Parmi les clients ayant choisi de prendre un café, quelle est la proportion de ceux qui qui ont pris un menu à 24 € ?

Cette proportion est $\frac{150}{180} \simeq 0,83$ soit 83 %.

e) Parmi l'ensemble des clients, calculer la proportion de clients ayant choisi un menu à 16 € ou un apéritif.

$p_{M \cup A} = p_A + p_M + p_{M \cap A}$

$= \frac{120}{300} + \frac{100}{300} - \frac{70}{300}$

$= \frac{150}{300}$ soit 50 % des clients.

Exercice 2 — *9 points*

Arnflue souhaite acquérir une maison vendue 320 000 €. Il va trouver son banquier pour avoir différentes simulations de prêts, à différents taux, sur différentes périodes.

Son banquier utilise un logiciel qui permet de calculer les remboursements annuels. Chaque année, la somme remboursée est la même.

Le logiciel utilise la formule suivante afin de déterminer la somme a qu'il faut rembourser chaque année :

$$a = \mathrm{D} \times \frac{i}{1-(1-i)^n}$$

avec

- a : l'annuité (somme à rembourser chaque année)
- D : la somme empruntée (la dette)
- i : le taux d'intérêt
- n : le nombre d'années pendant lesquelles on doit rembourser la somme empruntée.

Partie A - Formule

Dans cette partie, les résultats sont arrondis au centime d'euro.

1. Arnufle décide de rembourser les 320 000 € en 15 ans. Le banquier lui fait une simulation avec un taux à 4 %.

a) En utilisant la formule donnée, expliquer pourquoi son remboursement *mensuel* est de 2 329,41 €.

On calcule l'annuité grâce à la formule : $320\,000 \times \frac{0,04}{1-(1-0,04)^{15}}$ ce qui nous donne : $a = 27\,952,37$
pour trouver la mensualité, il suffit de diviser par 12, on trouve : 2 329,41 €

b) Dans ce cas, quelle est la somme remboursée par Arnufle au bout de 15 ans ? Calculer le taux en pourcentage du montant remboursé par rapport au montant emprunté.

Au bout de 15 ans, Arnufle doit rembourser : $2\,329,41 \times 12 \times 15 = 419\,293,8$ €
or $\frac{419\,293,8}{320\,000} = 1,31$ soit une augmentation de 31 % !

2. Quelles seraient les mensualités d'Arnufle avec un taux d'emprunt de 3,5 % sur 25 ans ?

On trouve $a = 320\,000 \times \frac{0,035}{1-(1-0,035)^{25}} = 18\,995,18$ soit
des mensualités de 1 582,93 €.

Partie B - Tableur

Rentré chez lui, Arnufle décide de poursuivre ces simulations à l'aide d'un tableur. Il obtient la feuille de calcul donnée en **Annexe**.

	A	B	C
1	**Remboursement d'emprunt**		
2			
3	montant	320 000	
4	taux	0,04	
5			
6	nb. d'années	annuités	mensualités
7	15		2 329,41
8	16	26 689,07	2 224,09
9	17	25 578,86	2 131,57
10	18	24 596,62	2 049,72
11	19	23 722,12	1 976,84
12	20	22 939,17	1 911,60
13	21	22 234,67	1 852,89
14	22	21 597,89	1 799,82
15	23	21 019,98	1 751,66
16	24	20 493,55	1 707,80
17	25	20 012,41	1 667,70

1. Quelle formule a-t-il pu écrire dans la cellule `A8` sachant qu'il veut la copier vers le bas ?
   `=A7+1`

2. Calculer les variations absolues entre le montant des mensualités sur 15 ans (cellule `C7`) et le montant des mensualités sur 16 ans (cellule `C8`) ; puis entre le montant des mensualités sur 16 ans (cellule `C8`) et le montant des mensualités sur 17 ans (cellule `C9`)

   variation absolue en 15 et 16 ans : $2224{,}09 - 2329{,}41 = -105{,}32$ | variation absolue en 16 et 17 ans : $2131{,}57 - 2224{,}09 = -92{,}52$

3. Calculer les variations relatives (en pourcentage arrondi au dixième) entre le montant des mensualités sur 15 ans (cellule `C7`) et le montant des mensualités sur 16 ans (cellule `C8`) ; puis entre le montant des mensualités sur 16 ans (cellule `C8`) et le montant des mensualités sur 17 ans (cellule `C9`)

   variation relative en 15 et 16 ans : $\dfrac{2224{,}09 - 2329{,}41}{2329{,}41} \simeq -0{,}045$ soit $-4{,}5\,\%$ | variation absolue en 16 et 17 ans : $\dfrac{2131{,}57 - 2224{,}09}{2224{,}09} \simeq -0{,}042$ soit $-4{,}2\,\%$

Partie C - Suite

1. Arnufle pense qu'il peut obtenir le montant de chaque mensualité à l'aide d'une suite arithmétique. Barnabé pense que non.
   D'après vous, qui a raison ? Pourquoi ?

   Pour pouvoir utiliser une suite arithmétique, il faut que la différence entre deux termes consécutifs soit constante : ce qui n'est pas le cas ici. Donc Barnabé a raison.

2. Pour se justifier Arnufle propose de modéliser le montant de chaque mensualité à l'aide de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2329{,}41$ et de raison $r = -105{,}32$.
   - Calculer u_1, u_2 et u_3.

     $u_1 = u_0 + r = 2329{,}41 - 105{,}32 = 2224{,}09$
     $u_2 = u_1 + r = 2224{,}09 - 105{,}32 = 2118{,}77$
     $u_3 = u_2 + r = 2118{,}77 - 105{,}32 = 2013{,}45$

   - Que penser du modèle d'Arnufle ?
     Les termes de la suite ne permettent pas de retrouver les valeurs calculées à l'aide du tableur : on ne peut pas modéliser le montant des mensualités à l'aide d'une suite arithmétique.

Partie D - Algorithme

En fait Arnufle est bien embêté : il ne peut rembourser que 18 000 € par an au maximum. Il se demande quel est le nombre d'années pendant lequel il devra rembourser son emprunt.

Il décide d'utiliser l'algorithme donné en **Annexe**.

Exercice 2.

1 **Variables** : n le nombre d'années
2 **Sortie** : Afficher n.
3 **Traitement**
4 n prend la valeur 25
5 Tant que $a > 18\,000$ faire
6 $\quad a$ prend la valeur $320\,000 \times \dfrac{0{,}04}{1-(1-0{,}04)^n}$
7 $\quad n$ prend la valeur $n+1$
8 Fintantque

1. Pourquoi peut-on initialiser n à 25 (ligne 3) ?
   On sait grâce au tableur que pour une période de 15 à 25 ans de remboursement, les annuités sont supérieure à 20 000 €.
2. Recopier sur votre copie en la complétant la ligne *Tantque ... faire* (ligne 5).
3. Que va afficher l'algorithme ? Expliquer votre démarche.
   On peut l'écrire dans une calculatrice, ou le faire tourner *à la main*... On trouve $n = 31$: il lui faudra prendre un crédit sur 31 ans !

Exercice 3 — *6 points*

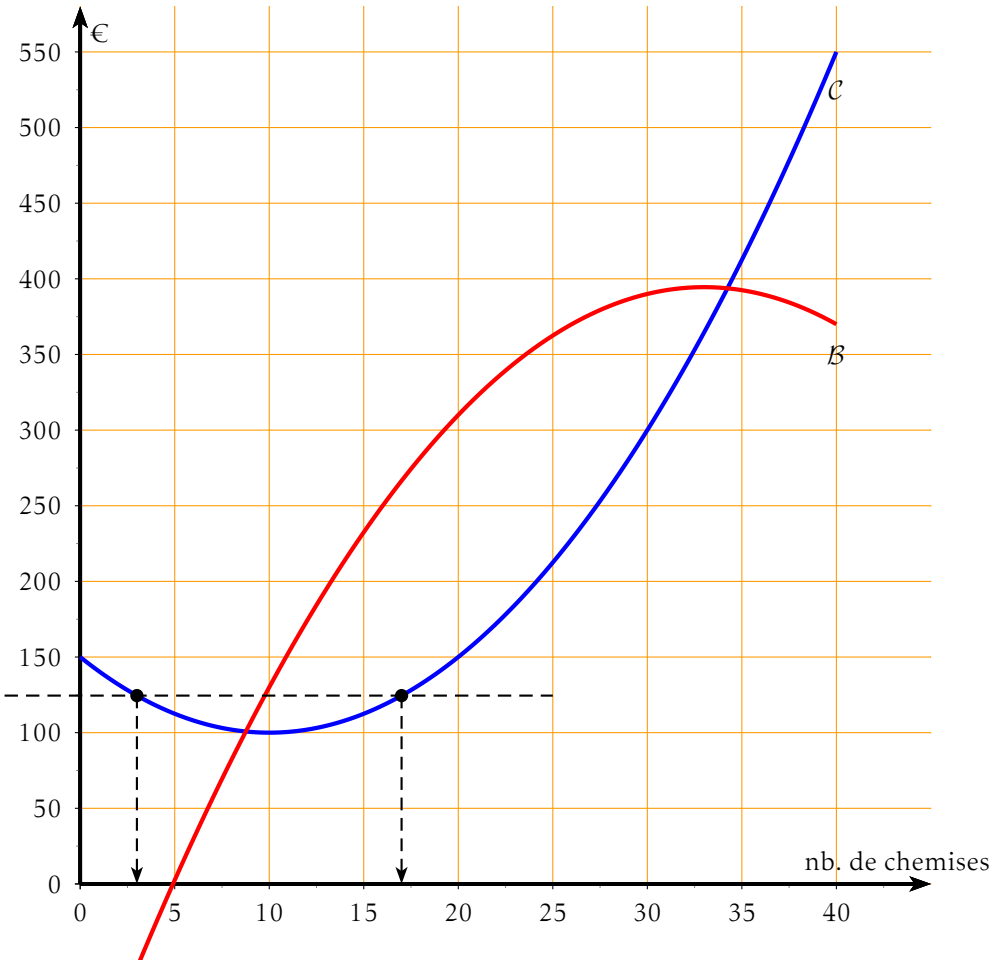
Une entreprise produit des chemises pour magasin d'habillement en prêt à porter. Le coût total de fabrication journalier, en euros, est donné par l'expression suivante : $\mathcal{C}(x) = 0,5x^2 - 10x + 150$ où x désigne le nombre de chemises confectionnées par jour.

Pour des raisons matérielles, l'entreprise ne fabrique jamais plus de 40 pièces par jour. On suppose qu'elle parvient toujours à vendre toute sa production.

On admet que le bénéfice est donné par la fonction $\mathcal{B}(x) = -0,5x^2 + 33x - 150$

Le graphique donné en **Annexe** donne la représentation des fonctions $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ sur $[0\,;40]$.

Exercice 3.



Partie A - Lectures graphiques

Lors des lectures graphiques, vous dessinerez les *pointillés de lecture*.

1. Lire l'image de 0 sur le graphique. Que représente cette valeur pour l'entreprise ?
On lit $\mathcal{C}(0) = 150$. Cela représente les frais fixes.

2. Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

a) Donner le coût de production pour 15 chemises fabriquées par jour.
On lit environ 110 €.

b) Donner la valeur de x pour laquelle la fonction $\mathcal{C}$ atteint son minimum. Quel est ce minimum ?
On lit que le coût de fabrication est minimal pour 10 chemises ; il est 100 €.

c) Est-il possible que le coût de production soit de 124,5 € ? Si oui pour quelle quantité de chemises produites ?
On lit que pour 3 ou 17 chemises, le coût de production est de 124,5 €

d) Lire la quantité de chemises produites qui permet d'obtenir, le bénéfice maximal.
on lit $x \simeq 32$.

Partie B - Calculs

1. Expliquer que chercher x tel que le coût de production vaut $124,5$ € revient à résoudre l'équation $0,5x^2 - 10x + 25,5 = 0$.

On cherche x tel que $\mathcal{C}(x) = 124,5$
$\Leftrightarrow 0,5x^2 - 10x + 150 = 124,5$
$\Leftrightarrow 0,5x^2 - 10x + 150 - 124,5 = 0$
$\Leftrightarrow 0,5x^2 - 10x + 25,5 = 0$

2. Résoudre l'équation : $0,5x^2 - 10x + 25,5 = 0$

$0,5x^2 - 10x + 25,5 = 0$ On reconnaît une équation du second degré avec $a = 0,5$, $b = -10$ et $c = 25,5$.

On calcule le discriminant $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 0,5 \times 25,5 = 49$ comme il est positif il y a deux solutions : $\alpha = \dfrac{-(-10) - \sqrt{49}}{2 \times 0,5} = 3$ et $\beta = \dfrac{-(-10) + \sqrt{49}}{2 \times 0,5} = 17$

3. Calculer les coordonnées du sommet de $\mathcal{B}$. À quoi correspondent ces coordonnées ?

$\mathcal{B}(x) = -0,5x^2 + 33x - 150$. On reconnaît une fonction du second degré. La courbe représentative est une parabole orientée *vers le bas* car le coefficient de x^2 est $-0,5$ qui est négatif.
Le sommet de la parabole est donc le maximum de la fonction.

Il a pour coordonnées $x_{\text{sommet}} = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-33}{2 \times (-0,5)} = 33$
son ordonnée est donc $\mathcal{B}(33) = 394,5$
Donc pour 33 chemises vendues le bénéfice sera maximal.
Il sera de 394,5 €.

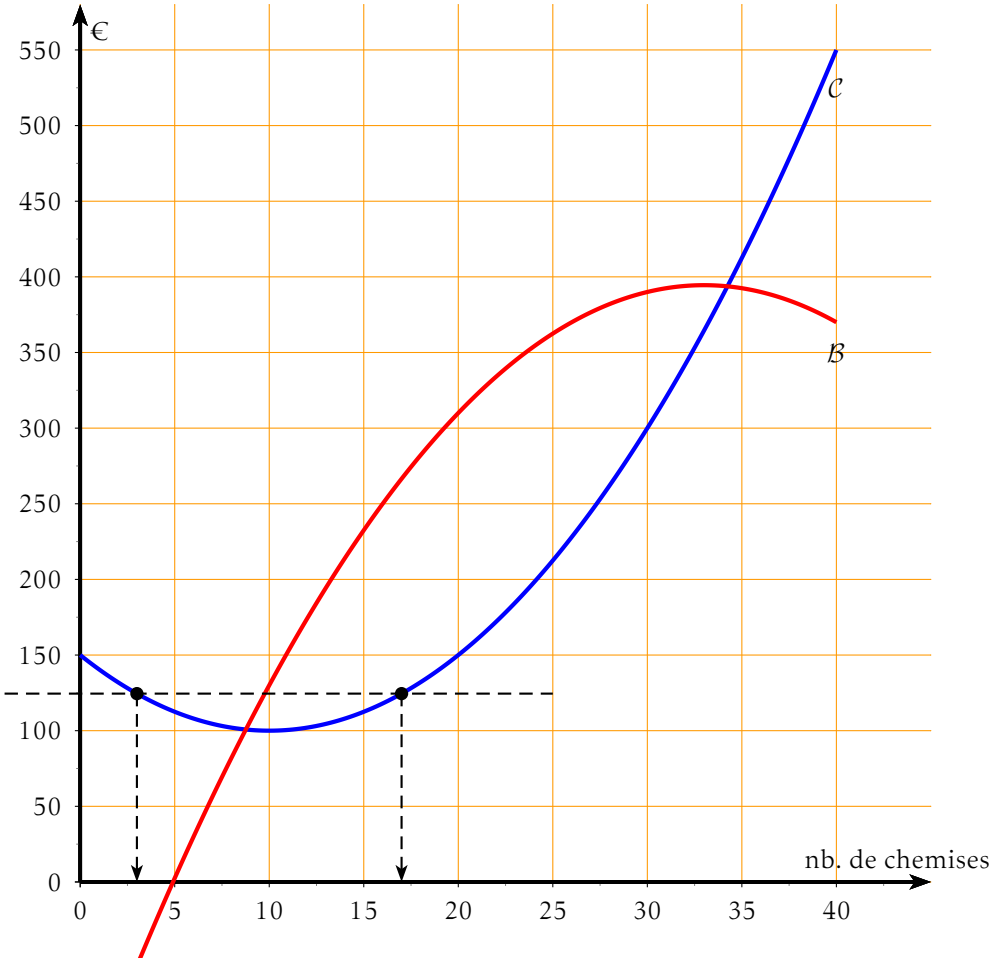
N° de candidat .....

ANNEXE

Exercice 1.

	A	B	C	D
1		Menu à 16 €	Menu à 24 €	Total
2	Clients ayant choisi un café	30 ②	150 ③	180
3	Clients ayant choisi un apéritif	70	50 ⑤	120 ①
4	Total	100	200 ④	300

Exercice 2.

1 **Variables** : n le nombre d'années
2 **Sortie** : Afficher n.
3 **Traitement**
4 n prend la valeur 25
5 Tant que $a > 18\,000$ faire
6 $\quad a$ prend la valeur $320\,000 \times \dfrac{0{,}04}{1-(1-0{,}04)^n}$
7 $\quad n$ prend la valeur $n+1$
8 Fintantque

Exercice 3.