DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES – 2 NDE –

Sujet B

Durée de l'épreuve : 2 heures

Le sujet (qui est noté sur 40) comporte 4 exercices ; il est à rendre avec la copie.

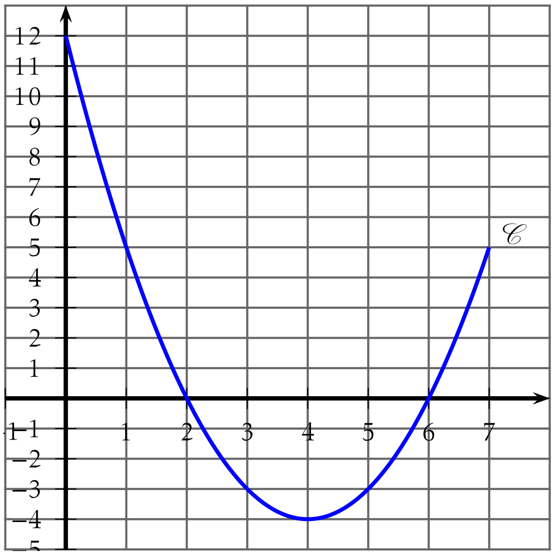
Les calculs doivent être détaillés. Les calculatrices sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur, **mais les échanges sont interdits** !

Les exercices sont indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Écrivez ici votre n° d'anonymat ....

Exercice 1 (Fonctions) :	.../ 12	
Exercice 2 (Statistiques) :	.../ 7	
Exercice 3 (Géométrie repérée) :	.../ 10	
Exercice 4 (Fonctions affines) :	.../ 11	
Total :	.../ 40 soit	.../ 20



Exercice 1 — Fonctions

12 points

On a tracé dans le repère ci-après la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.

Partie A – Lectures graphiques

1. Donner l'ensemble de définition de f.

L'ensemble de définition est $[0\,;7]$.

2. Dresser le tableau complet des variations de f.

Sujet A

x	0		3		7
variations de f	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	12

Sujet B

x	0		4		7
variations de f	12	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

3. f admet-elle des extrema ? Pour quelle valeur de x sont-ils atteints ?

Sujet A	Sujet B
f admet un minimum qui vaut -4 atteint en $x = 3$. f admet un maximum 12 atteint en $x = 7$.	f admet un minimum qui vaut -4 atteint en $x = 4$. f admet un maximum 12 atteint en $x = 0$.

4. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

sujet A

x	0		1		5		7
signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

sujet B

x	0		2		6		7
signe de $f(x)$		+	0	−	0	+	

5. Déterminer les antécédents de 2 par la fonction f.

Sujet A	Sujet B
Les antécédents de 2 par f sont : 0,5 et 5,5.	Les antécédents de 2 par f sont : $1,5$ et $6,5$.

6. Résoudre graphiquement : **a**) $f(x) = -3$ **b**) $f(x) > -3$

Sujet A	Sujet B
$f(x) = -3$ pour $x = 2$ ou $x = 4$. $f(x) > -3$ pour x appartenant à $[0;2[\cup]4;7]$.	$f(x) = -3$ pour $x = 3$ ou $x = 5$. $f(x) > -3$ pour x appartenant à $[0;3[\cup]5;7]$.

7. Encadrer $f(x)$ pour x variant dans l'intervalle $[1;6]$.

Sujet A ou B	
	Pour x appartenant à $[1;6]$, $f(x)$ appartient à $[-4;5]$.

Partie B –

Un randonneur, en vacances en Haute Savoie, décide de partir se balader. Tout au long de son périple, il relève régulièrement la température extérieure inscrite sur son appareil de mesure.

En fin de parcours, il trace alors la courbe décrivant la température en degré Celsius en fonction du temps écoulé en heure. Il obtient la courbe $\mathscr{C}$ de la **partie A** et s'aperçoit que cette courbe représente la fonction f définie sur $[0\,;7]$ par $f(x) = (x-4)^2 - 4$.

1. Montrer que, pour tout x de $[0\,;7]$, $f(x) = (x-2)(x-6) = x^2 - 8x + 12$.

   On peut développer $f(x)$ ou remarquer que l'expression de f est une identité remarquable et factoriser ou ...

2. Répondre aux questions suivantes en choisissant, parmi les trois formes précédentes, la forme de $f(x)$ la mieux adaptée :

   a) Calculer la température au départ de la randonnée.

Sujet A	**Sujet B**
$f(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 5 = 5$. Au départ de la randonnée, la température était de 5 °C.	$f(0) = 0^2 - 8 \times 0 + 12 = 12$. Au départ de la randonnée, la température était de 12 °C.

   b) Déterminer, par le calcul, le(s) moment(s) où la température est égale à 0° C.

Sujet A	**Sujet B**
Résolvons dans $[0\,;7]$ l'équation $f(x) = 0$. $(x-1)(x-5) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1) = 0$ ou $(x-5) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 5$ La température valait 0 °C au bout de 1 h et 5 h de marche.	Résolvons dans $[0\,;7]$ l'équation $f(x) = 0$. $(x-6)(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow (x-6) = 0$ ou $(x-2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 2$ La température valait 0 °C au bout de 2 h et 6 h de marche.

c) En remarquant que $2{,}5^2 = 6{,}25$; déterminer, par le calcul, le(s) moment(s) où la température est égale à 2,25°C.

Sujet A	**Sujet B**
Résolvons dans $[0;7]$ l'équation $f(x) = 2{,}25$. $(x-3)^2 - 4 = 2{,}25$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 - 6{,}25 = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 - 2{,}5^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-3-2{,}5)(x-3+2{,}5) = 0$ $\Leftrightarrow (x-5{,}5)(x-0{,}5) = 0$ $\Leftrightarrow x = 5{,}5$ ou $x = 0{,}5$ La température valait 2,25°C au bout de 0,5 h et 5,5 h de marche.	Résolvons dans $[0;7]$ l'équation $f(x) = 2{,}25$. $(x-4)^2 - 4 = 2{,}25$ $\Leftrightarrow (x-4)^2 - 6{,}25 = 0$ $\Leftrightarrow (x-4)^2 - 2{,}5^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-4-2{,}5)(x-4+2{,}5) = 0$ $\Leftrightarrow (x-6{,}5)(x-1{,}5) = 0$ $\Leftrightarrow x = 6{,}5$ ou $x = 1{,}5$ La température valait 5°C au bout de 1,5 h et 6,5 h de marche.

Exercice 2 — Statistiques

7 points

Voici le bilan du devoir commun de maths de cette année ! 272 élèves de 2$^{\text{nde}}$ étaient présents.

Note sur 20	5	7	8	9	10	11	12	15	17	20
nb. d'élèves	9	18	24	50	70	37	35	13	8	8

Partie A –

Compléter les phrases en **justifiant**.

- La note moyenne (arrondie au dixième) de cette épreuve est de $\dfrac{5\times 9 + 7\times 18 + \cdots + 20\times 8}{9 + 18 + \cdots + 28} \simeq 10{,}4$; et $\dfrac{37+35+13+8+8}{272} \simeq 37\,\%$ (arrondi à l'unité) des élèves ont eu une note supérieure à cette moyenne.
- Le troisième quartile de cette série est .... , cela signifie que ....

. . . .

Sujet A	**Sujet B**
Premier quartile : 9, en effet 25 % des élèves ont une note inférieure à 9 ;	Troisième quartile : 11, en effet 75 % des élèves ont une note inférieure à 11

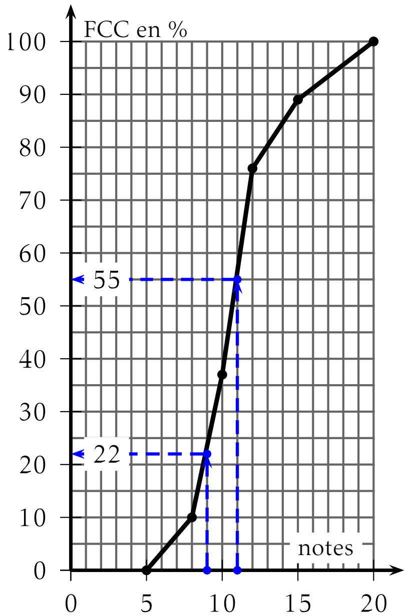
Partie B –

Pour des raisons obscures, l'équipe de maths du lycée préfère présenter le tableau de synthèse ci-après accompagné de la courbe des fréquences cumulées croissantes.

1. Compléter les résultats manquant dans le tableau (en justifiant les calculs de FCC).
2. A l'aide des **seuls éléments donnés dans cette partie B**, peut-on estimer le pourcentage d'élèves ayant obtenus une note comprise entre 9 et 11 inclus ? Expliquer votre démarche.

Il suffit de lire le graphique des fréquences cumulées croissantes.	On lit que environ 33 % des élèves ont une note comprise entre 9 et 11 inclus.

Classe	Effectif	Fréquences Cumulées Croissantes (arrondies à l'entier)
[5 ; 8[	27	10 %
[8 ; 10[	74	37 %
[10 ; 12[	107	$\dfrac{107}{272} + 0{,}37 = 0{,}76$
[12 ; 15[	35	$\dfrac{35}{272} + 0{,}76 = 0{,}89$
[15 ; 20]	29	100 %



Exercice 3 — Géométrie repérée

10 points

Dans le repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$ donné ci-après, on considère les points suivants :

E(2;−4), F(6;−2), G(2;4), H(−2;2).

1. Placer les points E, F, G et H dans le repère.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les coordonnées du point I, milieu du segment [EG].

$$I = \left(\frac{2+2}{2} ; \frac{-4+4}{2}\right) = (2 ; 0)$$

4. Montrer que $EF = \sqrt{20}$. On admet que $FG = \sqrt{52}$.

$EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$

5. Quelle est la nature de EFGH ?

EFGH semble être un rectangle.
Pour démontrer que EFGH est un parallélogramme il suffit de vérifier une des conditions suivantes (entre autres) :

- les diagonales [EG] et [FH] se coupent en leur milieu ;
- les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ sont égaux ;
- les vecteurs $\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont égaux ;
- $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG}$

Pour démontrer que c'est un rectangle, il faut un angle droit. Dans le triangle EFG, on sait que $EF = \sqrt{20}$ et que $FG = \sqrt{52}$. On a aussi $EG = 8$.
Or $EF^2 + FG^2 \neq EG^2$, donc le triangle n'est pas rectangle en F, EFGH n'est pas un rectangle.

6. Le point J a pour coordonnées $(145;69)$
Appartient-il à la droite (EF) ? Justifier.

$J \in (EF) \Leftrightarrow$ les points sont alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{EJ} = k\,\overrightarrow{EF}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sujet A :

$$\overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} 154 - 2 \\ 72 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152 \\ 76 \end{pmatrix}$$

or $2 \times 152 - 4 \times 76 = 0$, les vecteurs sont colinéaires, les points sont alignés.

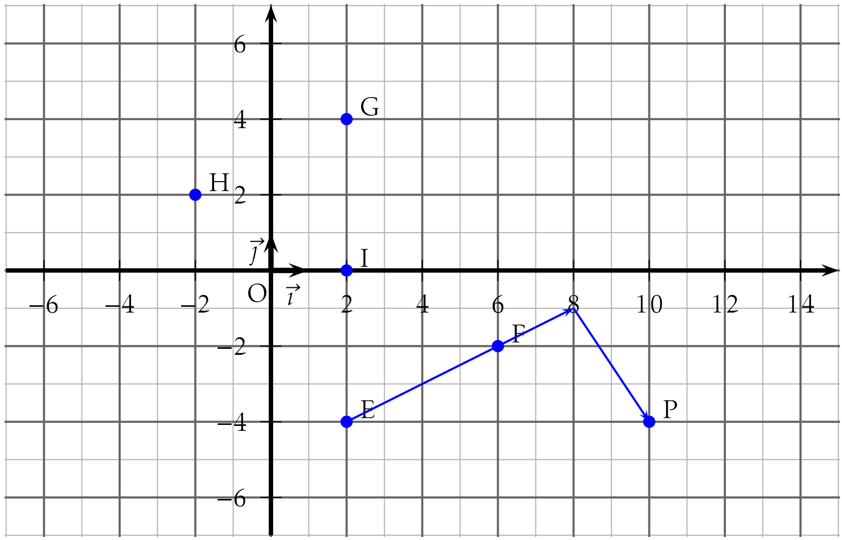
Sujet B :

$$\overrightarrow{EJ} = \begin{pmatrix} 145 - 2 \\ 69 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 143 \\ 73 \end{pmatrix}$$

or $2 \times 143 - 4 \times 73 \neq 0$, les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points ne sont pas alignés.

7. Construire le point P tel que $\overrightarrow{EP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$.
Les points H, F et P sont-ils alignés ? Justifier.

Construction de P à l'aide des coordonnées ou de la relation de Chasles ou …
Alignement : calcul vectoriel, coordonnées et vecteurs colinéaires, équation de droite… : oui, les points sont alignés.



Exercice 4 — Fonctions affines *11 points*

Dans cet exercice, les parties peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie A – Au Brönstein

Jusqu'en décembre 2015, au Brönstein, l'impôt (annuel) sur le revenu correspondait à 7,5 % des *revenus annuel*.

Suite à un changement de gouvernement en janvier 2016, le calcul de l'impôt (annuel) se fait à l'aide de la formule suivante : $y = 1{,}56x - 1\,000$ où x représente le *revenu mensuel*.

Si l'impôt est négatif, la personne concernée est exonérée (elle ne paye pas d'impôt).

Pour simplifier on assimilera le revenu au salaire.

1. Justifier, à l'aide d'un calcul, qu'avant le changement de gouvernement, une personne ayant un salaire mensuel de 1 250 € devait payer un impôt annuel de

1 125 €.

Si le salaire mensuel est de 1 250 €, alors le salaire annuel est de $1\,250 \times 12 = 15\,000$ €. Le montant de l'impôt annuel est donc de $15\,000 \times 7{,}5 \div 100 = 1\,125$ €.

2. Sur le graphique ci-après, identifier, en justifiant, la représentation graphique de la fonction permettant de calculer le montant de l'impôt annuel en fonction du salaire mensuel avant le changement de gouvernement.

Grâce au calcul précédent...

3. En expliquant la démarche, tracer sur le graphique, la représentation de la fonction qui donne le montant de l'impôt annuel en fonction du salaire mensuel à partir de janvier 2016.

La fonction est $y = 1{,}56x - 1\,000$, on reconnaît une fonction affine dont la représentation graphique est une droite...

Tableau de valeurs, 2 ou 3 points, ordonnée à l'origine et coefficient directeur... différentes méthodes possibles.

4. Résoudre l'inéquation : $1{,}56x - 1\,000 \leqslant 0$. Interpréter ce résultat.

$1{,}56x - 1\,000 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow 1{,}56x \leqslant 1\,000$

$\Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{1\,000}{1{,}56}$

Or $\dfrac{1\,000}{1{,}56} \simeq 641$.

Ou bien en utilisant la formule : $y = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b}{a}$.

Les personnes ayant un salaire mensuel inférieur à 640 € ne paieront pas d'impôt.

5. À partir de quel salaire mensuel (arrondi à l'euro) le nouveau calcul augmente-t-il le montant de l'impôt annuel ? Justifier la réponse par un calcul.

Il faut résoudre l'inéquation

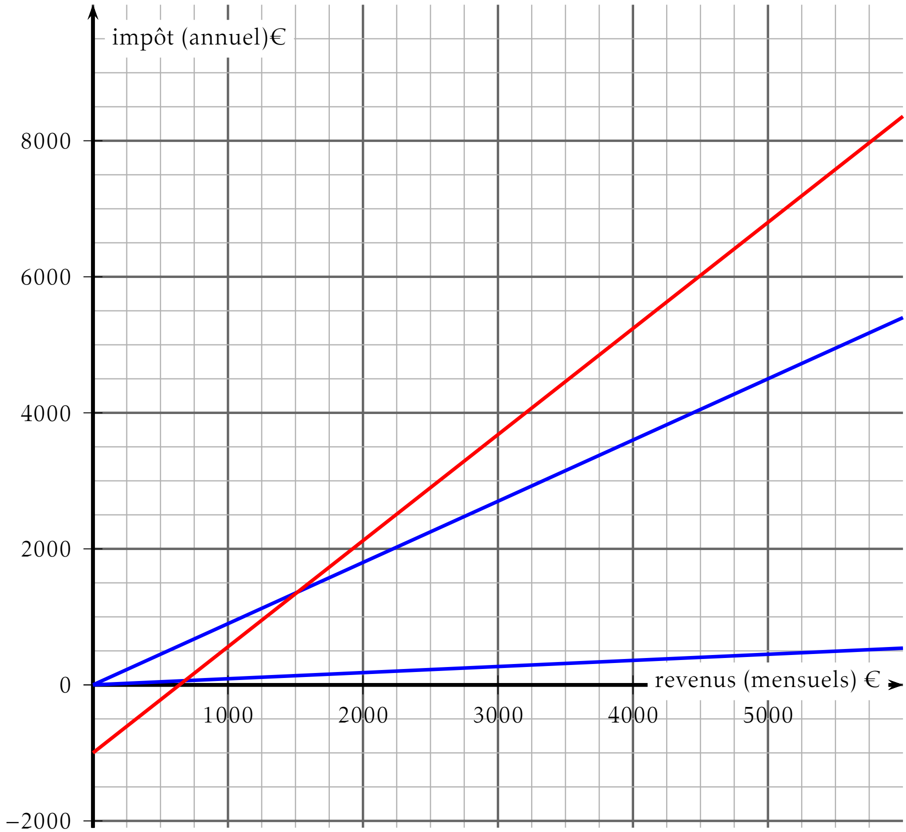
$1{,}56x - 1\,000 \geqslant \dfrac{7{,}5}{100} \times 12x$

$\Leftrightarrow 1{,}56x - 0{,}9x \geqslant 1\,000$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1\,000}{0{,}66}$

$\Leftrightarrow x \geqslant 1\,515$

L'impôt augmente à partir de 1 515 €.



① *exercice 4 partie A*

Partie B – En France

En France le calcul de l'impôt (annuel) sur le revenu fonctionne par « tranches » en fonction du revenu imposable.

Les tranches d'impositions sont données par le tableau suivant [1] :

Taux applicables aux revenus 2015 (impôt 2016)	Revenu imposable de la tranche
jusqu'à 9 700 € inclus	0 %
de 9 700 € exclus à 26 790 € inclus	14 %
de 26 790 € exclus à 71 825 € inclus	30 %
de 71 825 € exclus à 152 107 € inclus	41 %
plus de 152 107 €	45 %

À partir d'un exemple

Pour un célibataire sans personne à charge, si le revenu imposable *mensuel* est de 3 500 €, cela signifie qu'il déclare $3\,500 \times 12 = 42\,000$ € pour l'année.
42 000 est dans la troisième tranche d'imposition. Pour calculer l'impôt il faut donc *découper* 42 000 en trois tranches afin de calculer le revenu imposable par tranche :

tranche 1 : de 0 à 9 700 inclus	0 %	0	€
tranche 2 : de 9 700 à 26 790 inclus	14 %	2 392,6	€
tranche 3 : de 26 790 à 42 000 inclus	30 %	4 563	€
Montant de l'impôt		6 955,6	€

L'impôt (annuel) sur le revenu de cette personne sera donc de 6 955 € (l'impôt est tronqué à l'unité).

1. Écrire le calcul qui a permis d'obtenir le nombre 2 392,6 dans le tableau précédent.
Il faut calculer 14% de $(26\,790 - 9\,700)$, c'est à dire $0{,}14 \times 17\,090 = 2\,392{,}6$

1. *http://www.impots.gouv.fr*

Modélisation

Arnufle pense qu'il peut connaître le montant de l'impôt annuel en fonction du revenu mensuel d'un célibataire sans personne à charge.

2. Il décide de ne travailler que sur les trois premières tranches et de représenter dans un graphique le montant du l'impôt annuel en fonction du revenu mensuel.

   Il appelle x le revenu mensuel du célibataire en euro, et y le montant de l'impôt (en euro).

   Il obtient le tableau suivant :

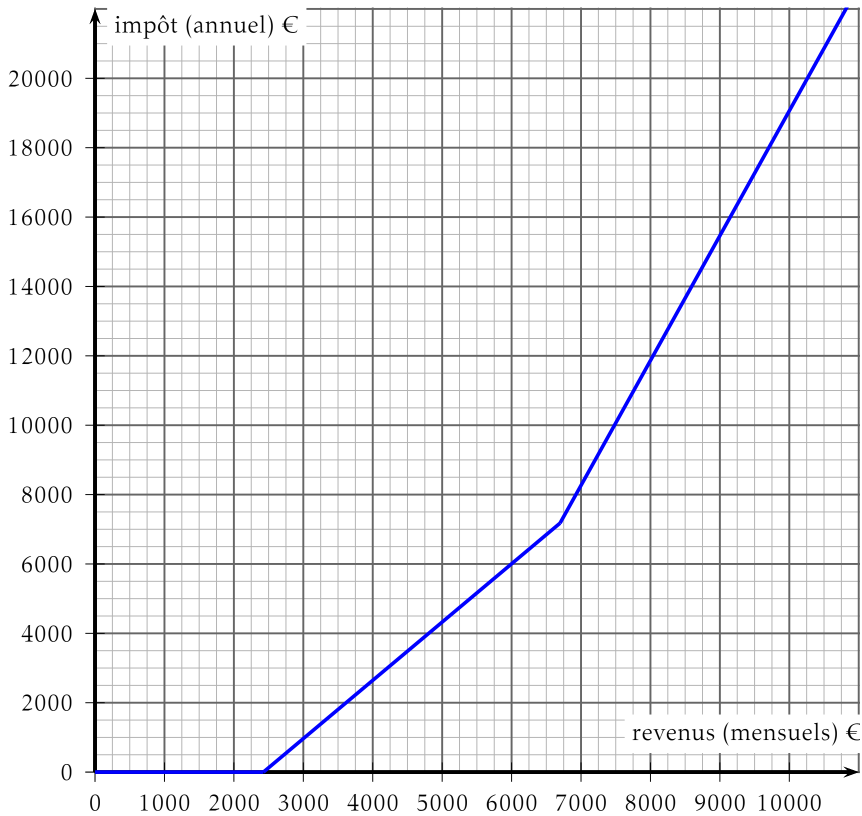
revenu mensuel du célibataire	calcul de l'impôt
si $x \in [0\,;2\,425]$	$y = 0$
si $x \in]2\,425\,;6\,697{,}5]$	$y = 1{,}68x - 4\,074{,}42$
si $x \in]6\,697{,}5\,;\ldots]$	$y = 3{,}6x - 16\,934{,}52$

   Tracer la représentation graphique des 3 fonctions trouvées par Arnufle dans le repère ci-après.

   Reconnaître des foncions affines, donner 2 ou 3 points permettant de tracer les droites.

3. Arnufle pense qu'il peut même écrire un algorithme sur le modèle suivant :

```
Variables : la valeur du revenu mensuel r
le montant de l'impôt i
si r ⩽ 9 700 alors
    i prend la valeur 0
sinon
    si r ⩽ 26 790 alors
        i prend la valeur 1,68 × r − 4 074,42
    sinon
        i prend la valeur 3,6 × r − 16 934,52
    fin
fin
Afficher i
```



② *exercice 4 partie B*

Compléter les instructions manquantes.