☙ Démonstrations en TS ❧

1. Suites

1.1 Limite d'une suite croissante majorée

> Si une suite est croissante et admet pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ.

Démonstration par l'absurde :

Supposons qu'il existe un rang n_0 à partir duquel ....
On a donc $\ell \in]\ell - 1\,; u_{n_0}[$.

Comme (u_n) converge vers ℓ, ...

............................, $u_n \in]\ell - 1\,; u_{n_0}[$,

or (u_n) est croissante,

donc il existe $n_1 > max(n_0, \mathrm{N})$ tel que ....

on ne peut donc pas avoir $u_{n_1} \in]\ell - 1\,; u_{n_0}[$
donc il *n'existe pas* de rang n_0 à partir duquel $u_{n_0} > \ell$.

1.2 Limite d'une suite croissante non majorée

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

La suite (u_n) n'est pas majorée, donc pour tout réel A, ...

....

La suite est (u_n) est croissante, donc ....

....

Donc la suite diverge vers $+\infty$

1.3 Limite d'une suite géométrique

Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} q^n = +\infty$

Hypothèse
On suppose connue l'inégalité de Bernoulli :

.... (peut être démontrée par récurrence).

Comme $q > 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que ...., donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

....

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha =$ .... (car ....), par comparaison des limites : ...

....

1.4 Comparaison de limites de suites

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
- à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc quelque soit $A > 0$, ...

....

En posant $M = max(n_0, n_1)$, alors pour tout $n \geqslant M$ on a ....

Comme A est un réel positif quelconque, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2. Fonctions

2.1 Primitive : existence

> Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Hypothèses

- Si f est définie et continue sur $[a\,;b]$, alors f admet un minimum m sur $[a\,;b]$.
- Si f est une fonction continue *et positive* sur l'intervalle $[a\,;b]$, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et sa dérivée est la fonction f.
- La fonction F définie et dérivable sur $[a\,;b]$ telle que $\forall x \in [a\,;b], F'(x) = f(x)$ est une primitive de f sur $[a\,;b]$.

On veut démontrer que si f est continue sur $[a\,;b]$ alors elle admet des primitives sur $[a\,;b]$

Soit la fonction g définie sur $[a\,;b]$ par $g(x) = f(x) - m$.

g est .... sur $[a\,;b]$.

Donc il existe G .... g sur $[a\,;b]$ et $G'(x) =$..................

On définit la fonction F sur $[a\,;b]$ par $F(x) = G(x) + mx$.

F est .... sur $[a\,;b]$ et $F'(x) =$...................., donc F est une primitive de f.

2.2 Fonction exponentielle : unicité

Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' égale à f et telle que $f = f'$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle.

Démonstration de l'unicité

On suppose déjà démontré l'existence de la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$, $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$.

Supposons qu'il existe une fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut alors définir sur $\mathbb{R}$, la fonction $f = \dfrac{g}{\exp}$

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) =$ ....

....

Donc f est une fonction ...., comme $f(0) =$ ....

...... on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) =$ ... d'où $g(x) =$ ....

D'où l'unicité de la fonction exponentielle.

2.3 Fonction exponentielle : Limite en l'infini

La limite en $+\infty$ de la fonction exponentielle est $+\infty$.

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \exp(x) - x$.

Sa dérivée est donnée par $g'(x) =$ ....

Comme $x \geqslant 0$ et que la fonction exponentielle est ...., on a :

$\exp(x) \geqslant \exp(0) \Leftrightarrow \exp(x) \geqslant \ \ldots \ \Leftrightarrow g'(x) \geqslant \ldots$

On en déduit que g est ....
.

Comme $g(0) = \ \ldots$, on a : $g(x) \geqslant$ .... Donc pour tout $x \geqslant 0$, ...

....

D'après les théorèmes de comparaison sur les limites, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ on en déduit que $\lim \exp(x) = +\infty$

3. Géométrie dans l'espace

3.1 Équation cartésienne d'un plan

L'équation du plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est :

$ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

On note $\mathrm{A}(x_0; y_0; z_0)$ un point de $\mathscr{P}$. Pour tout point $\mathrm{M}(x; y; z)$ de $\mathscr{P}$, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{n}$ sont ...., d'où ....

Cette égalité se traduit à l'aide des coordonnées de vecteurs par :

....

d'où .... ce qui correspond à l'équation cartésienne proposée en notant $d =$ ....

3.2 Théorème « du toit »

d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, avec d_1 incluse dans un $\mathscr{P}_1$ et d_2 incluse dans un plan $\mathscr{P}_2$.
Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite δ, alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles à δ.

- Si d_1 et d_2 sont confondues, alors δ est aussi .... avec d_1 et d_2 ; le théorème est donc vrai.

- Supposons que d_1 et d_2 soient strictement parallèles avec d_1 incluse dans un plan $\mathscr{P}_1$ et d_2 incluse dans un plan $\mathscr{P}_2$.
  Supposons que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite δ

  (En raisonnant par l'absurde) supposons que δ et d_1 soient ....

  ....

  M appartient donc au plan ...... et à la droite ....

  Or ... est ...., donc M appartient

  à ....

  M n'appartient pas à ......, car d_1 et d_2 sont ....

  ...., donc M et d_2 définissent ....

  d_1 étant .... d_2 et d_1 passant par M, il en résulte que d_1 ......

  ....

  On en déduit que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont ....

  ..., donc ...., ce qui contredit le fait qu'elles soient sécantes.

  En conclusion δ et d_1 ne peuvent être sécantes, et comme elles sont ....

  ....

  Par suite, δ est aussi parallèle à d_2 car ....

  ...

3.3 Droite orthogonale à un plan

> Si une droite $\mathscr{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ de vecteur directeur respectif $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Soit $\vec{v}$ le vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Comme $\mathscr{D}$ est .... d_1 et d_2, on a ....

....

Toute droite Δ de $\mathscr{P}$ a pour vecteur directeur ....

....

On a : $\vec{v} \cdot \vec{u}$ ....

donc $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$.

4. Statistiques

4.1 Statistiques : intervalle de fluctuation asymptotique

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ et α un réel tel que $0 < \alpha < 1$.
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, on appelle u_α l'unique réel tel que :

$$\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$

On appelle I_n l'intervalle :

$$\mathrm{I}_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}_n}{n} \in \mathrm{I}_n \right) = 1 - \alpha$

X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$; on pose $\mathrm{Z}_n = \dfrac{\mathrm{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
d'après le théorème de Moivre-Laplace,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

Or si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, on a

$$\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant b) = \mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b)$$

Pour $a=-u_\alpha$ et $b=u_\alpha$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant u_\alpha) = \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$

Or

$$\begin{array}{ll}
 & -u_\alpha \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant u_\alpha \\
\Leftrightarrow & -u_\alpha \leqslant \dfrac{\mathrm{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant u_\alpha \\
\Leftrightarrow & np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant \mathrm{X}_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
\Leftrightarrow & p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} \leqslant \dfrac{\mathrm{X}_n}{n} \leqslant p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\mathrm{X}_n}{n} \in \left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\mathrm{X}_n}{n} \in \mathrm{I}_n
\end{array}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant u_\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\dfrac{\mathrm{X}_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = 1-\alpha$

4.2 Intervalle de confiance

> Soit X_n une v.a. $\sim \mathscr{B}(n;p)$ avec $p \in]0;1[$. On pose $\mathrm{F}_n = \dfrac{\mathrm{X}_n}{n}$.
> Pour n suffisamment grand, p appartient à l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 et f la fréquence observée sur du caractère étudié sur un échantillon de taille n.

L'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est une réalisation de $\left[\mathrm{F}_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; \mathrm{F}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

On a :

$\mathrm{P}\left(p \in \left[\mathrm{F}_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; \mathrm{F}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{F}_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \mathrm{F}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(-p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -\mathrm{F}_n \leqslant -p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) =$
$\mathrm{P}\left(p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \mathrm{F}_n \geqslant p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{F}_n \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{F}_n \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)$

5. Probabilités

5.1 Loi normale

> Soit X une v.a. $\sim \mathcal{N}(0;1)$. Pour tout $\alpha \in]0;1[$, i existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(t) = P(t \leqslant X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Comme f est paire, on a $g(t) = 2\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$

Comme f est continue et dérivable, $g' = 2f$, comme $f > 0$, g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Or $g(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 2\times\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 2\times\frac{1}{2} = 1$. (Car f est une densité de probabilité, l'aire sous courbe vaut 1, par symétrie, l'aire entre 0 et $+\infty$ vaut $\frac{1}{2}$).

t	0	$+\infty$
variations de g	0 $\nearrow$	1

Pour tout $\alpha \in]0;1[$ on a $(1-\alpha) \in]0;1[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g étant strictement croissante de $]0;+\infty[$ dans $]0;1[$, il existe un unique $u_\alpha \in [0;+\infty[$ tel que $g(u_\alpha) = 1-\alpha$.

5.2 Loi exponentielle = loi sans vieillissement

> une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$

Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \frac{P(\{X \geqslant t+h\} \cap \{X \geqslant t\})}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant h)}{P(X \geqslant t)}$$

$$P_{T\geqslant t}(T \geqslant t+h) = \frac{1 - P(X < t+h)}{1 - P(x < t)} = \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda(t+h)}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}$$

$$= e^{-\lambda h} = 1 - \left(1 - e^{-\lambda h}\right) = 1 - P(X < h) = P(X \geqslant h)$$

5.3 Espérance d'une loi exponentielle

> L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Hypothèses

- L'espérance est donnée par : $\lim\limits_{x\to+\infty} E(x) = \displaystyle\int_a^x t \times f(t)\,\mathrm{d}t$ (ici $a = 0$).
- Une fonction f continue sur l'intervalle $[0; x]$, admet sur cet intervalle des primitives.
- La dérivée de $t \mapsto -te^{-\lambda t}$ est $t \mapsto -e^{-\lambda t} + t \times \lambda e^{-\lambda t}$;

Soit x un nombre réel strictement positif.
On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t \times \lambda e^{-\lambda t}$.
Comme cette fonction f est continue sur l'intervalle $[0; x]$, elle admet sur cet intervalle des primitives.

on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{d}{\mathrm{d}\,t}\left(-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)\mathrm{d}\,t = \int_0^x -\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t$

$\displaystyle\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t = \left[-t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x - \left[\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\right]_0^x$

$\displaystyle\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \left(\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\right)$

$\displaystyle\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t = -x\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ (car $\lambda > 0$) et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-\lambda x} = 0$ (croissances comparées)

d'où : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\lambda}$.

5.4 Indépendance de deux événements

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont aussi.

hypthèses : on sait que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})$

Les événements $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ et $\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}$ sont des événements incompatibles. La réunion de ces deux événements est l'événement B.
On a alors : $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}((\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\cup(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})) = \mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B})+\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$ car A et B sont indépendants.
On a donc $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\times\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\times(1-\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\times\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$ Donc les événements B et $\overline{\mathrm{A}}$ sont indépendants.