correction		20
	1. u_n=f(n) fct homo – variations	3
SUI03	u_n=f(n) fct homo – limites et FI	3
	v_n=f(n) fct puissance – variations	2
SUI04	v_n=fct(n) fct puissance – limites	1
	total	9
	2.A.1 calculer termes	1
SUI01	**2.A.2.a dem. Recurrence : redac**	1,5
CAL	dem recurrence : calculs	1
SUI03	**2.A.2.b limite et minoration**	1,5
MOD	2.A.3 demontrer variations : méthode	1,5
CAL	dem variations : calculs	1,5
	2.B.1 demontrer géom : méthode	1
CAL	demontrer geom : calcul	1
	2.B.2 expression de (u_n)	1
	2.B.3 algo	0
	total	11

C01

NOM ....- Mois de naissance ....

Exercice 1 — Suite, sens de variations, limite *9 points*

Pour chacune des suites suivantes, définie sur $\mathbb{N}$, préciser son sens de variation et sa limite en $+\infty$ en détaillant votre raisonnement et/ou les calculs.

$$u_n = \frac{n+3}{2n+7} \qquad v_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+7}$, définie sur $\mathbb{R}^+$.
on sait que
$f'(x) = \dfrac{1\times 7 - 3\times 2}{(2x+7)^2} = \dfrac{1}{(2x+7)^2}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $f'(x) > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

pour tout $n \neq 0$, on a
$u_n = \dfrac{n\times(1+\frac{3}{n})}{n\times(2+\frac{7}{n})} = \dfrac{1+\frac{3}{n}}{2+\frac{7}{n}}$
or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{n} = 1$
et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{7}{n} = 2$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$

$v_n = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
on reconnaît une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$, (donc $0 < q < 1$) et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{3} > 0$: la suite (v_n) est donc décroissante.

Comme $0 < q < 1$, la suite converge vers 0.

Exercice 2 — Suites : problème

11 points

Partie A – La suite (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 5$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = 3 \times u_0 - 2 \times 0 + 5$
$u_1 = 3 \times 0 - 2 \times 0 + 5 = 5$

$u_2 = 3 \times u_1 - 2 \times 1 + 5$
$u_2 = 3 \times 5 - 2 \times 1 + 5 = 18$

2. **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Initialisation pour $n = 0$ on a $u_0 = 0$, donc $u_0 \geqslant 0$.
Hypothèse de récurrence Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p \geqslant p$, montrons qu'alors $u_{p+1} \geqslant p + 1$.
Démonstration

$u_p \geqslant p$
$3u_p - 2p + 5 \geqslant 3p - 2p + 5$
$u_{p+1} \geqslant p + 5 \geqslant p + 1$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n).

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.
Comme pour tout n, $u_n \geqslant n$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 5 - u_n$
$u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 5$
or $u_n \geqslant n$, donc $2u_n \geqslant 2n$
puis $2u_n - 2n + 5 \geqslant 5$

donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
la suite (u_n) est strictement croissante.

Partie B – La suite (v_n)

Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 2$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

On cherche à montrer qu'il existe un réel q tel que $v_{n+1} = q \times v_n$.
$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 2$
$v_{n+1} = (3u_n - 2n + 5) - n - 1 + 2$
$v_{n+1} = 3u_n - 3n + 6$
$v_{n+1} = 3(u_n - n + 2)$
donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 2 = 2$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 3^n + n - 2$.

D'après la question précédente, $v_n = 3^n \times v_0 = 2 \times 3^n$
or $v_n = u_n - n + 2$, donc $u_n = v_n + n - 2$
d'où $u_n = 2 \times 3^n + n - 2$

3. Question bonus : proposer un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier p tel que $u_p \geqslant 10^k$ où k est un entier choisi par l'utilisateur.

Données : la valeur de k
Sortie : le plus petit entier p tel que $u_p \geqslant 10^k$

p **prend la valeur** 0
u **prend la valeur** 0
tant que $u < 10^k$ **faire**
  u **prend la valeur** $3u - 2p + 5$
  p **prend la valeur** $p + 1$
fin
return p