correction		20
CAL	1.A.1. calcul des premiers termes	1
MOD	1.A.2. transformer algo	1,5
	1.A.3. executer algo calculatrice	1,5
RAI	1.A.4. Conjectures	1
CAL	1.B.1. dem : calculs (drv ou inégalités)	1,5
SUI01	dem rédac récurrence	1,5
RAI	1.B.2. interpréter résultats	1
SUI01	1.B.3. dem : redac récurrence	1,5
	dem : calculs	1
CAL	1.B.4. calcul limite (factorisation. . .)	1,5
SUI03	limites	1
	total	14
FCT01	2.1 limite : rédaction + réponse	1,5
CAL	calcul : express. Conjuguée	1,5
CAL	calcul : factorisation	1,5
FCT03	2.2. lire limite	1,5
	total	6

C02_CORRIGE

NOM ....- Mois de naissance ....

Exercice 1 — Une jolie suite

100 points **14**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$

Partie A – Expérimentation

1. Calculer la valeur exacte de u_1, u_2 et u_3.

$$u_1 = 2 - \frac{1}{u_0} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_2 = 2 - \frac{1}{u_1} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$$

$$u_3 = 2 - \frac{1}{u_2} = 2 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

2. Arnufle propose un algorithme avec une boucle *pour* pour trouver u_{10}, Barnabé préfère utiliser une boucle *tantque* et il veut obtenir la valeur de u_{100}... En vous inspirant de l'algorithme d'Arnufle, écrire celui de Barnabé.

Algorithme 1 : Arnufle

Données : la valeur de u_0

Sortie : la valeur de u_{10}

u **prend la valeur** 2

pour n **de** 1 **jusque** 10 **faire**

  u **prend la valeur** $2 - \dfrac{1}{u}$

fin

Retourne u

Algorithme 2 : Barnabé

Données : la valeur de u_0

Sortie : la valeur de u_{100}

n **prend la valeur** 0

u **prend la valeur** 2

tant que $n \leqslant 100$ **faire**

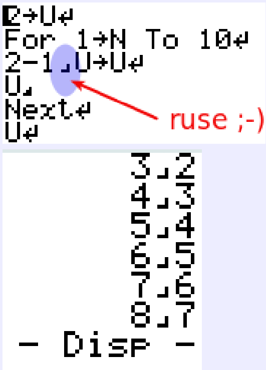
  u **prend la valeur** $2 - \dfrac{1}{u}$

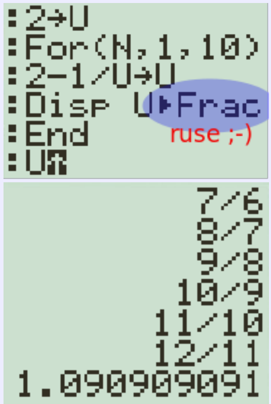
  n **prend la valeur** $n + 1$

fin

Retourne u

3. À l'aide de votre calculatrice, donner une valeur (approchée ou exacte) de u_{100}.





On trouve $u_{100} = \dfrac{102}{101} \simeq 1{,}009\,900\,99$

4. Émettre des conjectures concernant
   - l'expression de la suite en fonction de n ;

     Il semble que $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$
   - les variations de la suite (u_n) ;

     Elle semble décroissante
   - la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

     La suite semble converger vers 1.

Partie B – Démonstration

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 2$

Soit la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

f est dérivable et $f'(x) = -\dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ donc la fonction f est croissante sur $[1;2]$

Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 2$

Initialisation : on sait que $u_0 = 2$ et $u_1 = \dfrac{3}{2}$, donc $1 \leqslant u_1 < u_0 \leqslant 2$.

Hypothèse de récurrence : Supposons qu'il existe un entier k tel que $1 \leqslant u_{k+1} < u_k \leqslant 2$, démontrons qu'alors $1 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant 2$

Démonstration : on sait que (HR) $1 \leqslant u_{k+1} < u_k \leqslant 2$

la fonction f étant croissante sur $[1,\ 2]$ on a

$f(1) \leqslant f(u_{k+1}) < f(u_k) \leqslant f(2)$

$1 \leqslant u_{k+2} < u_{k+1} \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant 2$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 2$

2. Quelles conjectures de la question A.4.) sont démontrées à l'aide de la question précédente ?

- on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante ;
- on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n$, donc la suite est *décroissante et minorée*, elle converge.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

On démontre cette propriété à l'aide d'une démonstration par récurrence.

Initialisation : pour $n = 0$ on sait que $u_0 = 2$.

Or $\dfrac{0+2}{0+1} = 2$, donc la propriété est vraie au rang 0.

Hypothèse de récurrence : Supposons qu'il existe un entier k tel que $u_k = \dfrac{k+2}{k+1}$, démontrons qu'alors $u_{k+1} = \dfrac{k+3}{k+2}$

Démonstration : on sait que $u_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{u_k}$ donc, par HR, $u_{k+1} = 2 - \dfrac{1}{\frac{k+2}{k+1}} = 2 - \dfrac{k+1}{k+2} = \dfrac{2k+4-(k+1)}{k+2} = \dfrac{k+3}{k+2}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$

4. En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

$u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+2}{n+1}$ (qui est une forme indéterminée !)

pour $n \neq 0$ on a

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{2}{n} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 2 — Quelques limites

100 points **6**

1. Pour chacune des questions suivantes :
   - Calculer la limite demandée en détaillant *raisonnablement* les calculs
   - Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{3-\sqrt{x+5}}$

$\lim\limits_{x\to 4} x-4 = 0$
$\lim\limits_{x\to 4} 3-\sqrt{x+5} = 0$
il s'agit d'une forme indéterminée...

$$\frac{x-4}{3-\sqrt{x+5}} = \frac{(x-4)\times(3+\sqrt{x+5})}{9-(x+5)} = \frac{(x-4)\times(3+\sqrt{x+5})}{-(x-4)} = -(3+\sqrt{x+5})$$

donc $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{3-\sqrt{x+5}} = \lim\limits_{x\to 4} -(3+\sqrt{x+5}) = -6$
La courbe de la fonction admet un « trou » au point d'abscisse 4.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-x-6}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2} 2x^2-x-6 = 0$
$\lim\limits_{x\to 2} x-2 = 0$
il s'agit d'une forme indéterminée...

on remarque que $\dfrac{2x^2-x-6}{x-2} = \dfrac{(x-2)(2x+3)}{x-2} = 2x+3$

donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-x-6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} 2x+3 = 7$
La courbe de la fonction a un « trou » au point d'abscisse 2, mais les limites à gauche et à droite sont les mêmes.

2. Compléter les limites à l'aide d'une lecture graphique. La courbe représente une fonction f.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} f(x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} f(x) = +\infty$