	1ere partie (30 pts → note sur 20)	
	2nde partie (note sur 10)	
correction		40
FCT05	1.A.1. drv de u^n	1
CAL	calcul drv	1
	1.A.2. calcul f '(alpha)	0,5
MOD	interpréter	1
MOD	1.B.1. parabole : méthode	1
CAL	parabole : calcul coeff	3
FCT03	1.B.2. fct continue : définition	1,5
CAL	fct. Continue : valeur beta	0,5
FCT03	1.B.3 fct. Drv : méthode	0,5
	total	10
CHR	2.A.1 calcul phi : méthode	1
CAL	calcul phi valeur exacte	1
	2.B.1 calcul termes Fibo	1
MOD	2.B.2 choix algo justifié	1,5
CHR	2.B.3 modifier algo	0,5
	Algo → calculatrice (F_{47})	2
CHR	2.B.4 modifier algo	1
	Algo → calculatrice (phi)	1
	C. drv f : formule quotient	0,5
	drv f : dérivées u et v	1,5
CAL	drv f : calculs	1
REP	signe numer : méthode (orientat°. . .)	1,5
CAL	signe numer : calculs racines	2
CAL	calcul f(phi)	1,5
FCT01	limite en 1/2 (justifier)	1,5
FCT01	limite en +inf (justifier)	1,5
	total	20
	C.1 calcul termes	1
SUI01	C.2 recurr : rédaction	1,5
	recurr : init f(phi)	1
CAL	recurr : fct croissante	1,5
SUI04	C.3 def suite dec + minorée	1,5
SUI05	C.4 limite exposant : méthode	1,5
	Limite (1/2)^somme	0,5
SUI03	limite : gendarmes	1
	limite u_n	0,5
	total	10

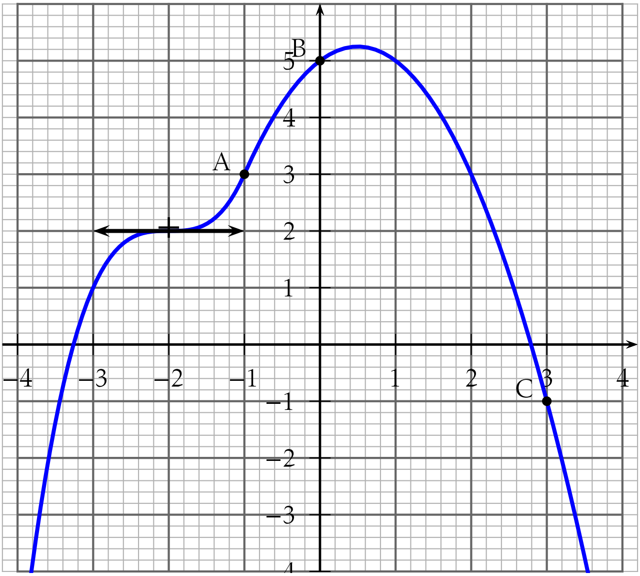
C03

NOM .... note sur 40, ramenée sur 20 - durée : 2 heures

Exercice 1 — Dur métier *10 points*

Vous êtes prof de maths en 1ereS et vous voulez évaluer vos élèves sur les lectures graphiques de nombres dérivés.

Pour cela vous voulez une dessiner cette fonction :



Partie A – Première fonction

Vous pensez qu'une fonction de la forme $f(x) = (x-\alpha)^3 + \beta$ définie sur $[-4;-1[$ doit pouvoir représenter la partie gauche de votre graphique...

1. Calculer f', la dérivée de f.

> à l'aide de la formule $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
> donc $f'(x) = 3 \times 1 \times (x-\alpha)^2 = 3(x-\alpha)^2$

2. Calculer $f'(\alpha)$. Comment interpréter ce résultat ?
   $f'(\alpha) = 0$ donc la tangente à la courbe au point d'abscisse α est de pente nulle, d'après le graphique, $\alpha = -2$.

Partie B – Seconde fonction

Vous pensez qu'une parabole définie sur $[-1\,;4]$ doit pouvoir représenter la partie droite de votre graphique...

1. Pour des raisons de lecture graphique, vous voulez que la parabole passe par les points $A(-1\,;3)$, $B(0\,;5)$ et $C(3\,;-1)$.
   Déterminer l'équation de cette parabole.

   Une parabole a une équation de la forme : $y = ax^2 + bx + c$
   - elle est « orientée vers le bas », donc $a < 0$
   - elle passe par B, donc $c = 5$
   - elle passe par A et C donc
     $$\begin{cases} a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 5 = 3 \\ a \times 3^2 + b \times 3 + 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 9a + 3b = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$
     En additionnant L_1 et L_2 en L_1
     $$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

   Donc la parabole a pour équation $y = -x^2 + x + 5$

2. La fonction g est définie sur $[-4\,;4]$ par

$$g(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^3 + \beta & \text{si } x \in [-4\,;-1[\\ ax^2 + bx + c & \text{si } x \in [-1\,;4] \end{cases}$$

Déterminer β pour qu'elle soit continue (les valeurs de α, a, b et c étant celles trouvées à l'aide des questions précédentes [1]).

Il faut vérifier que $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x) = g(-1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} (x+2)^3+\beta = 1+\beta$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} -x^2+x+5 = 3$

$g(-1) = 3$

Il faut donc que $1+\beta = 3$, soit $\beta = 2$

3. Expliquer comment déterminer si la fonction g définie précédemment est dérivable en -1.

Il faut vérifier que le nombre dérivé à droite de -1 et le même que celui à gauche de -1.

non demandé : on a :

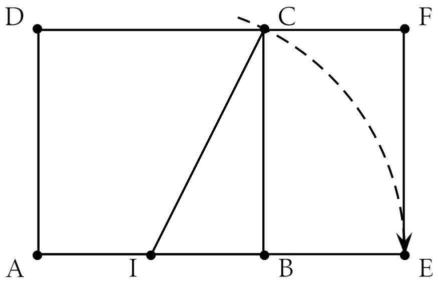
$$g'(x) = \begin{cases} 3(x+2)^2 & \text{si } x \in [-4\,;-1[\\ -2x+1 & \text{si } x \in [-1\,;4] \end{cases}$$

donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} g'(x) = 3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g'(x) = 3$ donc la fonction est dérivable en -1.

1. si vous n'avez pas répondu aux questions précédentes, poser $\alpha = 1$, $a = -2$, $b = 1$ et $c = 4$

Exercice 2 — Autour du nombre d'or

Partie A – Une construction géométrique *2 points*



ABCD est un carré de côté 1 unité.
I est le milieu de [AB]
IC = IE

Calculer la valeur exacte du rapport $\dfrac{AE}{AD}$, vérifier qu'une valeur approchée au millième est 1,618.

C'est ce rapport que les géomètres grecs ont appelé *nombre d'or* ! (AEFD est donc un *rectangle d'or*.)

$AE = AI + IE = AI + IC$

$AE = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

comme $AD = 1$, on trouve $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618$

Partie B – La suite de Fibonacci *7 points*

Soit (F_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. Après avoir vérifié que $F_2 = 2$ et $F_3 = 3$, calculer F_4, F_5 et F_6.

   $F_4 = F_3 + F_2 = 3 + 2 = 5$
   $F_5 = F_4 + F_3 = 5 + 3 = 8$
   $F_6 = F_5 + F_4 = 8 + 5 = 13$

2. Parmi ces deux algorithmes, lequel choisir pour calculer F_{10} ? Justifier votre choix.

Algorithme 1 : Fibonacci 1

Sortie : la valeur de F_{10}

1 a **prend la valeur** 1
2 b **prend la valeur** 1
3 **pour** k **de** 2 **jusque** 10 **faire**
4   f **prend la valeur** $a+b$
5   a **prend la valeur** b
6   b **prend la valeur** f
7 **fin**
8 **Retourne** f

Algorithme 2 : Fibonacci 2

Sortie : la valeur de F_{10}

1 a **prend la valeur** 1
2 b **prend la valeur** 1
3 **pour** k **de** 2 **jusque** 10 **faire**
4   f **prend la valeur** a
5   a **prend la valeur** b
6   b **prend la valeur** $f+b$
7 **fin**
8 **Retourne** b

les deux algorithmes donnent le bon résultat ! On peut s'en convaincre à l'aide d'un tableau de variables.

Fibonacci 1

k	f	a	b
	1	1	
2	2	1	2
3	3	2	3
4	5	3	5
5	8	5	8
6	13	8	13
7	21	13	21
8	34	21	34
9	55	34	55
10	89	55	89

Fibonacci 2

k	f	a	b
		1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13
7	8	13	21
8	13	21	34
9	21	34	55
10	34	55	89

3. Modifier l'algorithme choisi en 2 afin d'obtenir la valeur de F_{47}. (Écrire sur la copie le (les) n° de ligne à modifier et la (les) ligne(s) modifiée(s).)
Donner la valeur de F_{47}.

Il faut modifier la ligne 3 en :

Pour k de 2 jusque 47

On trouve $F_{47} = 4\,807\,526\,976$

4. Modifier (compléter ?) l'algorithme écrit en 3 afin d'obtenir la valeur de $\dfrac{F_{47}}{F_{46}}$.
(Vous pouvez n'écrire sur la copie que la (les) ligne(s) ajoutée(s) ou modifiée(s) en indiquant *clairement* la numérotation.)
Donner une valeur approchée de $\dfrac{F_{47}}{F_{46}}$.

Quelque soit l'algorithme, il suffit de modifier la dernière ligne en
Retourne b/a
$\dfrac{F_{47}}{F_{46}} \simeq 1{,}618$

Partie C – Étude de fonction

11 points

Soit la fonction f définie sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$

En détaillant votre démarche et en justifiant vos calculs, compléter le tableau de variations de la fonction f.

Calculer la valeur exacte de ϕ et les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

dérivée $f'(x) = \dfrac{2x(2x-1)-(x^2+1)\times 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$

donc la dérivée est du signe de $P(x) = x^2 - x - 1$

qui a pour racines $\dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times 1\times(-1)}}{2\times 1} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right]$ une seule racine convient : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$

La représentation de P est une parabole orientée « vers le haut » d'où le signe de la dérivée.

$$f(\phi) = \frac{\phi^2+1}{2\phi-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+1}{2\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1} = \frac{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}+1}{\sqrt{5}} = \frac{10+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}+10}{4\times 5} =$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi$$

limites $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} x^2+1 = \frac{5}{4}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} 2x-1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

x	$\frac{1}{2}$		ϕ		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	ϕ	$\nearrow$	$+\infty$

Partie D – Pour ceux qui ne font pas l'exercice de Spé *10 points*

On admet que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$ est strictement croissante sur $[\varphi\,;2]$ avec $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2u_n-1}$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{u_0^2+1}{2u_0-1} = \frac{2^2+1}{2\times 2-1} = \frac{5}{3}$$

$$u_2 = \frac{u_1^2+1}{2u_1-1} = \frac{\frac{25}{9}+1}{2\times\frac{5}{3}-1} = \frac{34}{9}\times\frac{3}{7} = \frac{34}{21}$$

2. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$: $\varphi \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 2$.

remarque : On sait que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $f(\varphi) = \varphi$ (si on a compris la partie précédente..., sinon on calcule $f(\varphi)$).

initialisation : $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{5}{3} < 2$ donc $\varphi \leqslant u_1 < u_0 \leqslant 2$.

hérédité : Supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $\varphi \leqslant u_{p+1} < u_p \leqslant 2$ » soit vraie ;
montrons qu'au rang $p+1$, la propriété « $\varphi \leqslant u_{p+2} < u_{p+1} \leqslant 2$ » est vraie.

démonstration : On sait que $\varphi \leqslant u_{p+1} < u_p \leqslant 2$,
or la fonction f est croissante sur $[\varphi ; 2]$ donc
$f(\varphi) \leqslant f(u_{p+1}) < f(u_p) \leqslant f(2)$
or $f(\varphi) = \varphi$ et $f(2) = u_1 < 2$ donc
$\varphi \leqslant u_{p+2} < u_{p+1} \leqslant 2$

conclusion : pour tout $n \geqslant 0$, on a $\varphi \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 2$

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} < u_n$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > \varphi$, donc la suite est minorée.
la suite (u_n) étant décroissante et minorée : elle converge.

4. En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - \varphi \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^n}$, donner la limite de (u_n) en détaillant les calculs.

on sait que $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$
comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^{n+1} - 1 = +\infty$
on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^n} = 0$
donc d'après le « théorème des gendarmes » $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \varphi = 0$
d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \varphi$

5. Vous êtes un peu frustrés d'admettre certains résultats ? En répondant (correctement) à cette question, vous gagnez des points bonus et mon admiration ;-)

En admettant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \varphi \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - \varphi)^2$, montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n - \varphi \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^n}$

non demandé pour démontrer l'inégalité admise :
$u_{n+1} - \varphi = \dfrac{u_n^2 + 1}{2u_n - 1} - \varphi = \dfrac{u_n^2 - 2\varphi u_n + 1 + \varphi}{2u_n - 1} = \dfrac{(u_n - \varphi)^2 - \varphi^2 + \varphi + 1}{2u_n - 1} = \dfrac{(u_n - \varphi)^2}{2u_n - 1}$
Or $u_n > \varphi$, donc $\dfrac{1}{2u_n - 1} < \dfrac{1}{2\varphi - 1}$
$\dfrac{1}{2u_n - 1} < \dfrac{1}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$ d'où l'inégalité.

initialisation : pour $n = 0$, $u_0 - \varphi = 2 - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0{,}382$

on a bien $0 \leqslant u_0 - \varphi \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^0}$

hérédité : Supposons qu'il existe un entier p pour lequel la propriété « $0 \leqslant u_p - \varphi \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^p}$ » soit vraie, montrons qu'au rang $(p+1)$, la propriété « $0 \leqslant u_{p+1} - \varphi \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^{p+1}}$ » est vraie.

démonstration : on sait que $\varphi < u_{p+1}$ donc $0 < u_{p+1} - \varphi$

par HR : $0 < u_p - \varphi \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^p}$

$0 < \left(u_p - \varphi\right)^2 \leqslant \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^p}\right)^2$

$0 < \left(u_p - \varphi\right)^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2+2^2+2^3+\ldots+2^{p+1}}$

$0 < \dfrac{1}{2}\left(u_p - \varphi\right)^2 \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2+2^2+2^3+\ldots+2^{p+1}}$

$0 < \dfrac{1}{2}\left(u_p - \varphi\right)^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{p+1}}$

donc $0 < u_{p+1} - \varphi \leqslant \dfrac{1}{2}\left(u_p - \varphi\right)^2 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{p+1}}$

conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n - \varphi \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n}$

Exercice 3 — Exercice de Spé

10 points

Merci de répondre sur une feuille à part.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
Vérifier que $A^2 = A + 2I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\times(-4)+6\times(-3) & -4\times 6+6\times 5 \\ -3\times(-4)+5\times(-3) & -3\times 6+5\times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

2. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = r_nA + s_nI$

initialisation :pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $0 \times A + 1 \times I = I$, c'est à dire $r_0A + s_0I = I$ donc la propriété $A^n = r_nA + s_nI$ est vraie au rang 0.
hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $A^p = r_pA + s_pI$ » soit vraie, montrons qu'au rang $(p+1)$ la propriété « $A^{p+1} = r_{p+1}A + s_{p+1}I$ » est vraie.
démonstration :

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A \times A^p \\ &= A \times \left(r_pA + s_pI\right) \\ &= r_pA^2 + s_pA \times I \\ &= r_p(A + 2I) + s_pA \\ &= (r_p + s_p)A + 2r_pI \\ &= r_{p+1}A + s_{p+1}I \end{aligned}$$

conclusion : pour tout n entier, $A^n = r_nA + s_nI$.

3. Démontrer que la suite (k_n) définie pour tout entier naturel n par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison (-1).
En déduire pour tout entier naturel n, une expression de k_n en fonction de n.

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = -(r_n - s_n) = -k_n$
donc (k_n) est une suite géométrique de raison (-1) et de premier terme $k_0 = r_0 - s_0 = -1$, d'où $k_n = (-1)^n \times (-1) = (-1)^{n+1}$.

4. On donne $r_n = \dfrac{1}{3}\left(2^n + (-1)^{n+1}\right)$.
Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel n, une expression de s_n en fonction de n.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 2r_n = \dfrac{2}{3}\left(2^n + (-1)^{n+1}\right)$,

on remarque que $s_0 = \dfrac{2}{3}\left(2^{0-1} + (-1)^0\right) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2} + 1\right) = 1$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{2}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)$.

5. En déduire alors, pour tout entier naturel n, une expression des coefficients de la matrice A^n.

on sait que $\mathrm{A}^n = r_n\mathrm{A} + s_n\mathrm{I}$,

donc $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} -4r_n + s_n & 6r_n \\ -3r_n & 5r_n + s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2\times(-1)^n & 2^{n+1} - 2\times(-1)^n \\ -2^n + (-1)^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$

en effet : $-4r_n + s_n = \dfrac{-4}{3}\left(2^n + (-1)^{n+1}\right) + \dfrac{2}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)$

$= \left(\dfrac{-4}{3} + \dfrac{1}{3}\right) \times 2^n + \left(\dfrac{-4}{3} \times (-1) + \dfrac{2}{3}\right) \times (-1)^n$

$= -2^n + 2 \times (-1)^n$

et $5r_n + s_n = \dfrac{5}{3}\left(2^n + (-1)^{n+1}\right) + \dfrac{2}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)$

$= \left(\dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3}\right) \times 2^n + \left(\dfrac{5}{3} \times (-1) + \dfrac{2}{3}\right) \times (-1)^n$

$= 2^{n+1} + (-1)^{n+1}$

pour ceux qui veulent travailler avec Xcas :

```
A:=[[-4, 6],[-3, 5]]
matpow(A,n)
```