C04

26 points… c'est comme ça ;-)

Pour l'ensemble du contrôle, les calculs peuvent être vérifiés à l'aide de la calculatrice, MAIS ils **doivent** être justifiés par le détails des opérations effectuées et/ou un petit schéma.

Exercice 1 — Cours

4 points

Pour chacun des nombres complexes suivant dire (en justifiant le choix) s'il est écrit

- sous forme algébrique
- sous forme trigonométrique
- ni l'une, ni l'autre

$$z_1 = 4(2+3i) \qquad z_2 = 3(0{,}707 - 0{,}293i) \qquad z_3 = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \qquad z_4 = 2i + 3$$

- sous forme algébrique : z_4 avec $\mathfrak{Re}(z_4) = 3$ et $\mathfrak{Im}(z_4) = 2$
- sous forme trigonométrique : z_3 avec $|z_3| = 5$ et $\arg(z_3) = \frac{\pi}{4}$
- ni l'une, ni l'autre : z_1, z_2 : les nombres dans la parenthèse ne correspondent pas à des sinus ou cosinus (il faut qu'ils soient compris entre -1 et 1 et que la somme de leur carré fasse 1)

Exercice 2 — Quelques calculs

6 points

Rappel : $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

Répondre aux questions suivantes avec $z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$ puis avec $z = \dfrac{1+i}{i+\sqrt{3}}$

1. Écrire z sous forme algébrique.

2. Écrire z sous forme trigonométrique.

3. Que permettent d'obtenir ces deux calculs ?

$z = (1+i)(\sqrt{3}+i)$
forme algébrique : $z = \sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1 = \left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

forme trigonométrique : petit dessin...

- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$
- $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$

donc $|z| = |1+i| \times |\sqrt{3}+i| = 2\sqrt{2}$
et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

On vient de trouver que :
$\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
et $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$z = \frac{1+i}{i+\sqrt{3}}$

forme algébrique : $z = \frac{(1+i)(-i+\sqrt{3})}{(i+\sqrt{3})(-i+\sqrt{3})} = \frac{-i+1+\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{1+3} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}+\frac{-1+\sqrt{3}}{4}i$

forme trigonométrique : Ce sont les mêmes complexes que précédemment ! donc $|z| = \frac{|1+i|}{|\sqrt{3}+i|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
et $\arg(z) = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

On vient de trouver que :
$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{-1+\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$

Exercice 3 — Démonstrations

12 points

Partie A – Modules

En admettant que pour tous complexes z et z' on a :

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$

Partie B – Racines d'un polynôme

ATTENTION : la question 1 est en bonus (pour ceux qui ont tout fini et qui s'ennuient...) mais vous pouvez utiliser le résultat pour répondre à la question 2.

1. (question bonus) Soit P un polynôme complexe défini par :
   $P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$.
   On sait que
   a) α est une racine de P, c'est à dire $P(\alpha) = 0$;
   b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\overline{x} = x$
   c) pour tous complexes z et z' : $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
   Démontrer (en justifiant !) que $P(\overline{\alpha}) = 0$.

2. (question obligatoire) Soit $P(z) = z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 4z + 7$.
   Factoriser P en produit de 4 facteurs (aide : il y a une racine évidente).

   on remarque de $P(i) = i^4 - 4i^3 + 8i^2 - 4i + 7 = 1 - 4 \times (-i) - 8 - 4i + 7 = 0$ donc i est une racine de P et d'après le théorème $-i$ aussi.
   Donc $P(z) = (z - i)(z + i)(az^2 + bz + c)$
   $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 + bz + 7)$
   en effet il est évident que $a = 1$ et quand on développe les constantes on aura $1 \times c = 7$, d'où $c = 7$.
   $P(z) = z^4 + bz^3 + 7z^2 + z^2 + bz + 7$
   en identifiant les coefficients : $b = -4$
   donc $P(z) = (z^2 + 1)(z^2 - 4z + 7)$
   pour factoriser $z^2 - 4z + 7$ on calcule $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -12$
   donc il y a deux racines complexes conjuguées : $z_{1,2} = \dfrac{-(-4) \pm i\sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$
   d'où $P(z) = (z - i)(z + i)(z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3})$

Exercice 4 — Ensemble de points

4 points

On se place dans le plan complexe avec un repère $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$.

1. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}_1$ des points M d'affixe z tels que $|z + 2i| = 3$?
   Si A est le point d'affixe $-2i$, alors $\mathscr{E}_1$ est le cercle de centre A et de rayon 3

2. Quel est l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des points M d'affixe z tels que $|z+2i| = |z-i|$?
Si B est le points d'affixe i, alors $\mathscr{E}_2$ est la médiatrice du segment [AB]

3. Existe-t-il des points M qui appartiennent à la fois à $\mathscr{E}_1$ et à $\mathscr{E}_2$? Jusitifier.
B appartient à $\mathscr{E}_1$, donc la médiatrice de [AB] coupe le cercle $\mathscr{E}_1$ en deux points exactement. Il y a donc deux points qui appartiennent aux deux ensembles.