C05

NOM ....

Cette évaluation est un « Vrai - Faux ». Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise enlève 0,5 point, une absence de réponse n'enlève, ni n'apporte de de point. Une réponse incohérente enlève 0,5 points. Si le total des points de l'évaluation est négatif, il est ramené à 0.

Calculatrice **non** autorisée !

Écrire *VRAI* ou *FAUX* en toute lettres dans la case en fin de ligne.

Exercice 1 — Fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x$.

On désigne par $\left(\mathrm{C}_f\right)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

(1) Pour tout réel x, on a : $f'(x) = (\mathrm{e}^{x} - 1)(\mathrm{e}^{x} + 2)$. $\boxed{\text{VRAI}}$

$f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x$.
donc $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2$
$= \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2$
En posant $\mathrm{X} = \mathrm{e}^{x}$ on reconnaît un polynôme du second degré, racines évidentes 1 et -2,
donc $f'(x) = (\mathrm{e}^{x} - 1)(\mathrm{e}^{x} + 2)$
On peut aussi simplement développer cette expression et la comparer à celle de trouvée en dérivant.

(2) Pour tout réel x, on a : $f(x) > \dfrac{3}{2}$. **FAUX**

le signe de $f'(x)$ est celui de $(e^{x}-1)$, donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.	on a $f(0)=\dfrac{1}{2}e^{0}+e^{0}-2\times 0=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$ donc pour tout réel x on a $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$. On peut aussi calculer $f(0)$...

(3) $\left(C_f\right)$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$. **FAUX**

pour tout x, $f(x)\geqslant\dfrac{3}{2}$, la fonction ne peut pas admettre l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$	

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. **VRAI**

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$	donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -2x=+\infty$

Exercice 2 — Fonction exponentielle

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par

$$f(x)=e^{-x}-2x \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{e^{-x}(x-1)}{e^{-x}+2}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f.

(5) On peut montrer sans calculatrice que $f(1)<-1$ **VRAI**

on sait que $-1<0 \Leftrightarrow e^{-1}<e^{0} \Leftrightarrow e^{-1}<1 \Leftrightarrow e^{-1}-2<-1 \Leftrightarrow f(1)<-1$	

(6) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α avec $0 < \alpha < 1$. — VRAI

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} - 2$, comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et donc $f'(x) < 0$.
La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a : $f(0) = \mathrm{e}^{-0} - 2 \times 0 = \mathrm{e}^0 = 1$
on a montré que $f(1) < -1$ donc $f(1) < 0$

f est une fonction *strictement* décroissante sur $[0;1]$ et change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un *unique* $\alpha \in [0;1]$ tel que $f(\alpha) = 0$

(7) Si $a \in \mathbb{R}$, alors la tangente à (C) en $x = a$ coupe l'axe des abscisses en un point de coordonnées $(g(a);0)$. — VRAI

équation de la tangente :
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$
$y = (-\mathrm{e}^{-a} - 2)(x-a) + \mathrm{e}^{-a} - 2a$
l'abscisse du point d'intersection entre la tangente et l'axe des abscisses vérifie :
$0 = (-\mathrm{e}^{-a} - 2)(x-a) + \mathrm{e}^{-a} - 2a$

$$x = \frac{-\mathrm{e}^{-a} + 2a}{-\mathrm{e}^{-a} - 2} + a$$

$$x = \frac{-\mathrm{e}^{-a} + 2a - a\mathrm{e}^{-a} - 2a}{-\mathrm{e}^{-a} - 2}$$

$$x = \frac{-\mathrm{e}^{-a} - a\mathrm{e}^{-a}}{-\mathrm{e}^{-a} - 2}$$

$$x = \frac{-\mathrm{e}^{-a}(1+a)}{-\mathrm{e}^{-a} - 2}$$

$$x = \frac{\mathrm{e}^{-a}(1+a)}{\mathrm{e}^{-a} + 2}$$

$x \neq g(a)$

(8) On donne l'algorithme suivant : **FAUX**

```
Données : la fonction f
Sortie : les valeurs de A et B
A prend la valeur 0
B prend la valeur 1
tant que |B − A| > 0,02 faire
    I prend la valeur (A + B)/2
    si f(A) × f(I) > 0 alors
        A prend la valeur I
    sinon
        B prend la valeur I
    fin
fin
return A et B
```

À la fin de l'exécution, il affiche 0,343 75 et 0,359 375 ; nous pouvons en déduire que $0{,}344 < \alpha < 0{,}360$.

C'est l'algorithme de la recherche d'une solution par dichotomie.	Mais attention : il faut arrondir de la façon suivante : $0{,}343 < \alpha < 0{,}360$

Exercice 3 — Fonction exponentielle

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(9) la fonction f est paire **VRAI**

$f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = f(x)$	

(10) $(f(0))^2 - (g(0))^2 = 1$ **VRAI**

$f(0) = \dfrac{e^0 + e^0}{2} = 1$

$g(0) = \dfrac{e^0 - e^0}{2} = 0$

(11) pour tout x réel, $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$ **VRAI**

$f^2(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})^2}{4} = \dfrac{e^{2x} + e^x \times e^{-x} + e^{-2x}}{4}\dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$

de même : $g^2(x) = \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$

d'où $f^2(x) - g^2(x) = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \dfrac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

: on ne peut pas répondre à cette question sans avoir répondu à la question précédente !

Exercice 4 — Suite et trigonométrie

Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} n\right)$.

(12) Pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+8} > u_n$. **FAUX**

$u_{n+8} = (-1)^{n+8} + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4}(n+8)\right)$

$u_{n+8} = (-1)^n \times (-1)^8 + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} n + \dfrac{\pi}{4} \times 8\right)$

$u_{n+8} = (-1)^n \times 1 + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} n + 2\pi\right)$

$u_{n+8} = (-1)^n + 2 \times \sin\left(\dfrac{\pi}{4} n\right) = u_n$.

(13) Pour tout entier naturel n, on a : $-3 \leqslant u_n \leqslant 3$. **VRAI**

on a : $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

et $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

donc $-2 \leqslant 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} n\right) \leqslant 2$

d'où $-3 \leqslant u_n \leqslant 3$

(14) La suite (u_n) est monotone. FAUX

Attention : monotone $\neq$ constant !

$u_0 = (-1)^0 + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 0\right) = 1$

$u_1 = (-1)^1 + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 1\right) = -1 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} < u_0$

$u_2 = (-1)^2 + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{4} \times 2\right) = 1 + 2 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 2\right) = 3 > u_1$

(15) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0.$ VRAI

On sait que $-3 \leqslant u_n \leqslant 3$

donc $\frac{-3}{n} \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{3}{n}$

D'après le théorèmes des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$

: on ne peut pas répondre à cette question sans avoir répondu à la question (13).

Exercice 5 — Trigonométrie

Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = \sin^2 x$

(16) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ VRAI

limite du cours

(17) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ FAUX

$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \sin x$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$

: on ne peut pas répondre à cette question sans avoir répondu à la question précédente.

(18) la dérivée de la fonction f est $f'(x) = \sin(2x)$ **VRAI**

$f'(x) = 2(\sin x)' \sin x$ or la dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin(2x)$

(19) la fonction f est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ **FAUX**

si $x \in \left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$,
alors $2x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$
la fonction $f'(x)$ est donc négative sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;0\right]$ et positive sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$

: on ne peut pas répondre à cette question sans avoir répondu à la question précédente.

(20) l'équation $(\sin x)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet deux solutions sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right]$ **FAUX**

d'après ses variations, les images de la fonction sont dans l'intervalle $\left[0\,;f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$

: on ne peut pas répondre à cette question sans avoir répondu à la question précédente.