C06 - PARTIE 1

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien entre ce nombre et les triangles équilatéraux.

Partie A – Propriétés du nombre j

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2+z+1=0.$$

$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3$
donc l'équation admet deux solutions conjuguées :
$\alpha,\beta=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

$j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, on peut écrire : $j=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$	donc $\lvert j\rvert=1$ et $\arg(j)=\dfrac{2\pi}{3}$ d'où $j=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. Démontrer les égalités suivantes :

a) $j^3=1$

$j^3=\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}\times3}=\mathrm{e}^{i\times2\pi}=1$

b) $j^2=-1-j$

d'après A.1 j est solution de $z^2+z+1=0$, donc $j^2+j+1=0$, d'où $j^2=-1-j$

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1 ; j et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

PQR semble être équilatéral.
idée 1 :
Démontrons que $\left(\overrightarrow{PQ}\,;\overrightarrow{PR}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ et que PQ = PR.
Soit $Z=\dfrac{z_R-z_P}{z_Q-z_P}$, montrons que $\arg Z=\dfrac{\pi}{3}$ et $|Z|=1$

$Z=\dfrac{z_R-z_P}{z_Q-z_P}=\dfrac{j^2-1}{j-1}=\dfrac{(j-1)(j+1)}{j-1}=j+1=-j^2=-e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\pi}\times e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{7\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

donc $\arg Z=\dfrac{\pi}{3}$ et $|Z|=1$
le triangle PQR est équilatéral.

idée 2 :
$PQ=|q-p|=|j-1|$
$QR=|r-q|=|j^2-j|=|j|\times|j-1|=|j-1|$ car $|j|=1$
$RP=|p-r|=|1-j^2|=|j^3-j^2|=|j^2|\times|j-1|=|j-1|$ car $|j^2|=|j|\times|j|=1$
donc PQ = QR = RP, le triangle PQR est équilatéral.

Partie B –

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+j\,b+j^2c=0$.

On note A, B et C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A.3b, démontrer l'égalité : $a-c=j(c-b)$.

d'après A.3b on a : $j^2=-1-j$ donc
$a+j\,b+j^2c=0$
$a+j\,b+(-1-j)c=0$
$(a-c)+(b-c)j=0$
$a-c=j(c-b)$

2. En déduire que CA = BC.

on sait que $a-c=j(c-b)$ donc $|a-c|=|j(b-c)|=|j|\times|b-c|$ donc CA = BC, le triangle ABC est isocèle en C.

3. En déduire la nature de ABC.

On vient de démontrer que AC = BC, donc ABC est isocèle en C et que $a-c=j(c-b)$, $a-c=-j(b-c)$

$$\frac{a-c}{b-c}=e^{i\pi}\times e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\frac{a-c}{b-c}=e^{i\frac{5\pi}{3}}=e^{i\frac{-\pi}{3}}$$

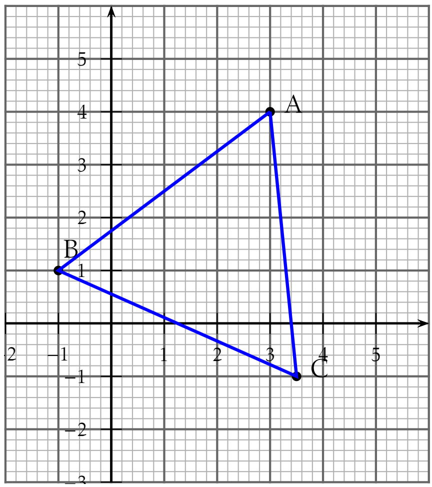
$$\arg\frac{a-c}{b-c}=-\frac{\pi}{3}$$

donc $\left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CA}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$

le triangle ABC est donc équilatéral.

Partie C –

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $a=3+4i$, $b=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $c=\dfrac{7}{2}-i$ dans le repère ci-contre.



2. Le triangle ABC est-il équilatéral ?

Rappels :

$$\cos\frac{17\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

et $$\sin\frac{17\pi}{12}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

D'après ce qui précède, si le triangle est équilatéral, les affixes des sommets vérifient : $a+jb+j^2c=0$

ici : $z=(3+4i)+e^{i\frac{2\pi}{3}}\times\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}+\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\dfrac{7}{2}-i\right)$

$$=2+4i+\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}-\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{7\sqrt{3}}{4}i$$

donc pour la partie réelle :

$$\mathfrak{Re}(z)=2+\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}-\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\neq 0$$

donc z ne peut être nul, le triangle n'est pas équilatéral.