# C06 – PARTIE 2

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthogonal.

**1.** Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente $\Delta$ dont on déterminera une équation.

$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et
$g(0) = 2\mathrm{e}^{\frac{0}{2}} - 1 = 2 \times 1 - 1 = 1$
donc $f(0) = g(0)$, le point de coordonnées $(0;1)$ appartient aux deux courbes.

équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
$f'(x) = \mathrm{e}^x$,
donc $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \mathrm{e}^0 x + 1 = x + 1$

équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.
$g'(x) = 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, donc $y = g'(0)(x-0) + g(0) = \mathrm{e}^0 x + 1 = x + 1$

les courbes ont la même tangente $\Delta$ d'équation $y = x + 1$

**2.** Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite $\Delta$
Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

**a)** Déterminer la limite de la fonction $h$ en $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+2 = +\infty$
d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

**b)** Justifier que, pour tout réel $x, h(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x}\right)$.
En déduire la limite de la fonction $h$ en $+\infty$.

On retrouve l'expression de $h$ en développant...

$\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

**c)** On note $h'$ la fonction dérivée de la fonction $h$ sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x$, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de $x$.

$h'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$

On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $h'(x) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$

**d)** Dresser le tableau de variations de la fonction $h$ sur $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $h(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| variations de $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**e)** En déduire que, pour tout réel $x$, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

D'après le tableau de variations, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geqslant 0$

donc $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 1 - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$

**f)** Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite $\Delta$ ?

l'équation précédente signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $\Delta$.

**3.** Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

**a)** Pour tout réel $x$, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

$\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1$

**b)** Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

On sait que $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 \geqslant 0$
donc $\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \Leftrightarrow f(x) \geqslant h(x)$.
Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$.

**4.** Soit $a$ un réel non nul et $k_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k_a(x) = ae^{\frac{x}{a}} - a + 1$$

.

**a)** Montrer que toutes les courbes représentatives des fonctions $k_a$ ont un point commun d'abscisse nulle et une tangente commune en ce point. Donner l'équation de cette tangente.

pour tout $a$, $k_a(0) = a\mathrm{e}^0 - a + 1 = 1$ donc toutes les courbes passent par le point $(0;1)$.
pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ :
$k_a'(x) = a \times \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{\frac{x}{a}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{a}}$

donc la tangente en 0 a pour équation :
$y = k_a'(0)(x-0) + k_a(0) = x + 1$
Toutes les courbes sont tangentes à $\Delta$ en $x = 0$.

**b)** Déterminer les limites en l'infini des fonctions $k_a$.

si $a > 0$, alors
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{a} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{a}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} k_a(x) = 1 - a$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{a} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{a}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k_a(x) = +\infty$

si $a < 0$, alors
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{a} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{a}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} k_a(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{a} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{a}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k_a(x) = 1 - a$