BAC BLANC – MATHÉMATIQUES – Section S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 exercices :

- Les candidats *n'ayant pas* la spécialité maths doivent traiter les **quatre** exercices suivants :

  nos 1 ; $\boxed{2}$; 3 et 4

- Les candidats *ayant* la spécialité maths doivent traiter les **quatre** exercices suivants :

  nos 1 ; $\boxed{5}$; 3 et 4

Une calculatrice par candidat autorisée.

Toute trace de recherche sera prise en compte pour l'évaluation.

Exercice 1 — Tous les candidats *4 points*

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1;\,2;\,5)$, $B(-1\,;6\,;4)$, $C(7\,;-10\,;8)$ et $D(-1\,;3\,;4)$.

1. **Proposition 1 :** Les points A, B et C définissent un plan.

Un plan est défini par trois points non alignés, autrement dit les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne doivent pas être colinéaires.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 6-2 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ -10-2 \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$

On remarque que $-3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, les points A, B et C sont donc alignés : ils ne définissent pas un plan. $\boxed{\text{FAUX}}$

2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.
Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.

idée 1 Retrouver l'équation du plan (vecteur normal...)
idée 2 Les coordonnées des points doivent vérifier l'équation du plan.
Soit le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-2z+9 = 0$

point A : $1 - 2 \times 5 + 9 = 0$, donc $A \in \mathscr{P}$
point B : $-1 - 2\times 4 + 9 = 0$, donc $B \in \mathscr{P}$
point D : $-1 - 2\times 4 + 9 = 0$, donc $D \in \mathscr{P}$
le plan $\mathscr{P}$ est bien le plan (ABD).
$\boxed{\text{VRAI}}$

3. **Proposition 3 :** Une représentation paramétrique de la droite (AC) est

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{cases}$$

idée 1 Nous savons que $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$

Or un vecteur directeur de la droite proposée est $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Ce vecteur n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AC}$, donc cette équation paramétrique n'est pas celle de la droite (AC).
idée 2 Retrouver les valeurs de t telles que les coordonnées de A et C vérifient l'équation.
$\boxed{\text{FAUX}}$

4. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x-y+5z+7 = 0$ et $\mathcal{P}'$ le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.

Proposition 4 : Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

Si les plans sont parallèles, un vecteur normal $\vec{n}$ de $\mathcal{P}$ doit être colinéaire à un vecteur normal $\vec{n'}$ de $\mathcal{P}'$. on lit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les plans ne sont pas parallèles. $\boxed{\text{FAUX}}$

Exercice 2 — Uniquement pour les NON SPÉ MATHS *5 points*

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

1. **a)** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

la suite (u_n) semble décroissante à partir de $n = 1$.

2. **a)** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$.

Initialisation :
on sait que $u_1 = \dfrac{1}{5}u_0 + 3 \times 0,5^0 = \dfrac{1}{5} \times 2 + 3 \times 1 = 3{,}4$

or $\dfrac{15}{4} \times 0,5^1 = \dfrac{15}{8} = 2 - \dfrac{1}{8}$

comme $3{,}4 \geqslant 2 - \dfrac{1}{8}$, la propriété est initialisée au rang 1.

Hypothèse de récurrence :
Supposons qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $u_p \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^p$; montrons qu'au rang $p+1$ on a : $u_{p+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^{p+1}$

Démonstration :
On sait que $u_p \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^p$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5}u_p \geqslant \dfrac{3}{4} \times 0,5^p$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5}u_p + 3 \times 0,5^p \geqslant \dfrac{3}{4} \times 0,5^p + 3 \times 0,5^p$

$\Leftrightarrow u_{p+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^p$

Or $\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^p \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^p \times 0{,}5$

$\dfrac{15}{4} \times 0{,}5^p \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0{,}5^{p+1}$

donc $u_{p+1} \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^{p+1}$

Conclusion :
Pour tout $n \geqslant 1$ on a : $u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Par définition de (u_n) :

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n - u_n$

$u_{n+1} - u_n = -\dfrac{4}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$

D'après la question précédente :

$u_n \geqslant \dfrac{15}{4} \times 0,5^n$

donc : $-\dfrac{4}{5}u_n \leqslant -3 \times 0{,}5^n$

$-\dfrac{4}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n \leqslant 0$

$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

D'après la question 2a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$;
D'après la question 2b, la suite (u_n) est décroissante à partir de $n = 1$.

Théorème du cours : si une suite est décroissante et minorée, alors elle converge.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.
On précisera le premier terme de la suite (v_n).

$\frac{1}{5}v_n = \frac{1}{5}u_n - 2\times 0{,}5^n$
$= \frac{1}{5}u_n + 3\times 0{,}5^n - 3\times 0{,}5^n - 2\times 0{,}5^n$
$= u_{n+1} - 5\times 0{,}5^n$
$= u_{n+1} - 10\times 0{,}5\times 0{,}5^n$
$= u_{n+1} - 10\times 0{,}5^{n+1}$
$= v_{n+1}$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 10\times 0{,}5^0 = -8$

b) En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n$.

D'après la question précédente : pour tout $n\in\mathbb{N}, v_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$
donc $u_n - 10\times 0,5^n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$ d'où $u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n + 10\times 0,5^n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{5} < 1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ car $-1 < 0{,}5 < 1$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que $u > 0{,}01$	(1)
	n prend la valeur $n+1$	(2)
	u prend la valeur $\frac{1}{5}u + 3\times 0{,}5^{n-1}$	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Exercice 3 — Tous les candidats

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z_{M'} = -i\,z_M$.

On désigne par I le milieu du segment [AM].

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et *uniquement dans cette question*, on prend $z_M = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z_M.

$$z_M = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

remarque : la calculatrice permet de trouver la partie réelle de z_M, la partie imaginaire étant irrationnelle, c'est moins sûr.

b) Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.
Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

$z_{M'} = -i\,z_M = -i\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - i$

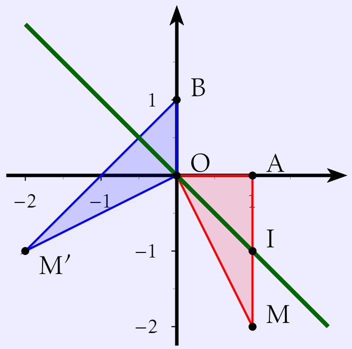
$z_{M'} = -i\,z_M$, donc $|z_{M'}| = |-i\,z_M| = |i| \times |z_M| = 1 \times |z_M|$
Or $z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $|z_M| = 2$ d'où $|z_{M'}| = 2$
remarque : la calculatrice donne le module de $z_{M'}$

$z_{M'} = -i\,z_M$, donc $\arg(z_{M'}) = \arg(-i\,z_M) = \arg(-i) + \arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{2} + \arg(z_M)$

Or $z_M = 2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $\arg(z_M) = -\dfrac{\pi}{3}$ d'où $\arg(z_{M'}) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{5\pi}{6}$

c) Placer les points A, B, M, M′ et I dans un repère $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.



2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

I est le milieu de [AM] donc $z_I = \dfrac{z_A + z_M}{2}$ donc $x_I = \dfrac{x+1}{2}$ et $y_I = \dfrac{y}{2}$

b) Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.

On sait que $z_{M'} = -i\,z_M$ donc $z_{M'} = -i(x+iy) = y - ix$

c) Écrire les coordonnées des points I, B et M′.

D'après ce qui précède : $I\left(\dfrac{x+1}{2};\dfrac{y}{2}\right)$, $B(0;1)$ et $M'(y;-x)$

d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.

(OI) est la hauteur issue de O est équivalent à $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BM'} = 0$

$\overrightarrow{OI} = \begin{pmatrix} \dfrac{x+1}{2} \\ \dfrac{y}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{BM'} = \begin{pmatrix} y \\ -x-1 \end{pmatrix}$

comme $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{BM'} = \dfrac{x+1}{2}\times y + \dfrac{y}{2}\times(-x-1) = 0$ les vecteurs sont orthogonaux, donc (OI) est la hauteur issue de O.

e) Montrer que $BM' = 2OI$.

D'après ce qui précède (grâce aux coordonnées) : $\overrightarrow{BM'} = 2\,\overrightarrow{OI}$ donc $BM' = 2OI$

Exercice 4 — Tous les candidats

6 points

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont données à la fin de l'exercice (Annexe à rendre avec la copie).

Partie A –

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B –

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Le coefficient directeur au point $\mathrm{A}(a\,;f(a))$ est le nombre $f'(a)$.	$f(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f'(x) = \mathrm{e}^x$, d'où $f'(a) = \mathrm{e}^a$.

   b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.

De même que précédemment : $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$	donc $g'(x) = -(-1) \times \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$ d'où $g'(b) = \mathrm{e}^{-b}$

   c) En déduire que $b = -a$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour équation réduite $y = mx + p$ avec $m = f'(a) = g'(b)$ puisqu'elle est tangente à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$.	Donc $f'(a) = g'(b)$ $\Leftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b}$ $\Leftrightarrow a = -b$ $\Leftrightarrow b = -a$

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x-1)\,\mathrm{e}^x+1=0$.

En considérant que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ son équation réduite est $y=f'(a)(x-a)+a$ $y=\mathrm{e}^a(x-a)+\mathrm{e}^a$ En considérant que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}_g$ son équation réduite est $y=g'(b)(x-b)+g(b)$	$y=\mathrm{e}^{-b}(x-b)+1-\mathrm{e}^{-b}$ $y=\mathrm{e}^a(x+a)+1-\mathrm{e}^a$ Donc $\mathrm{e}^a(x-a)+\mathrm{e}^a=\mathrm{e}^a(x+a)+1-\mathrm{e}^a$ $\Leftrightarrow \mathrm{e}^a\,(x-a+1-x-a+1)=1$ $\Leftrightarrow 2(-a+1)\,\mathrm{e}^a-1=0$ $\Leftrightarrow 2(a-1)\,\mathrm{e}^a+1=0$ Donc a est solution de $2(x-1)\,\mathrm{e}^x+1=0$.

Partie C –

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=2(x-1)\,\mathrm{e}^x+1$.

1. **a)** Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

limite en $-\infty$ il y a une forme indéterminée, d'où la réécriture de φ. $\varphi(x)=2x\,\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^x+1$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^x=0$ (par croissance comparée : limite du cours)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=1$ **limite en $+\infty$** $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$

b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

$\varphi(x)=2(x-1)\,\mathrm{e}^x+1$ $\varphi(x)=2x\,\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^x+1$ $\varphi'(x)=2\,\mathrm{e}^x+2x\,\mathrm{e}^x-2\,\mathrm{e}^x$ $\varphi'(x)=2x\,\mathrm{e}^x$	φ est définie sur $\mathbb{R}$, or $\forall x\in\mathbb{R}, \mathrm{e}^x>0$, donc le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de φ	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

avec $\varphi(0)=2(0-1)\,\mathrm{e}^0+1=-2+1=-1$

2. **a)** Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

La fonction φ est continue sur $]-\infty\,;0]$ et est strictement décroissante ; l'ensemble des images est $[-1\,;1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, dans le cas de la stricte monotonie, il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty\,;0]$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.	La fonction φ est continue sur $]0\,;+\infty]$ et est strictement croissante ; l'ensemble des images est $]-1\,;+\infty]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, dans le cas de la stricte monotonie, il existe un unique réel $\beta \in]0\,;+\infty]$ tel que $\varphi(\beta) = 0$.

b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

$\alpha \simeq -1{,}68$ car $\varphi(-1{,}68 > 0$ et $\varphi(-1{,}69) < 0$
et $\beta \simeq 0{,}77$ car $\varphi(0{,}78 > 0$ et $\varphi(0{,}77) < 0$

Partie D –

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.

La droite (EF) passe par le point E, il suffit de démontrer que son coefficient directeur $\dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E}$ est égal à $f'(\alpha) = e^{\alpha}$.

Posons $X = \dfrac{y_F - y_E}{x_F - x_E} - e^{\alpha}$ et montrons que $X = 0$

$$X = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} - e^{\alpha}$$

$$X = \frac{g(-\alpha) - f(\alpha)}{-\alpha - \alpha} - e^{\alpha}$$

$$X = \frac{1 - e^{\alpha} - e^{\alpha} + 2\alpha e^{\alpha}}{-2\alpha}$$

$$X = \frac{1 + 2(\alpha - 1)e^{\alpha}}{-2\alpha}$$

Or $1 + 2(\alpha - 1)e^{\alpha} = 0$ (d'après **B.2**), donc $X = 0$ donc la droite (EF) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ passant par E (d'abscisse α).

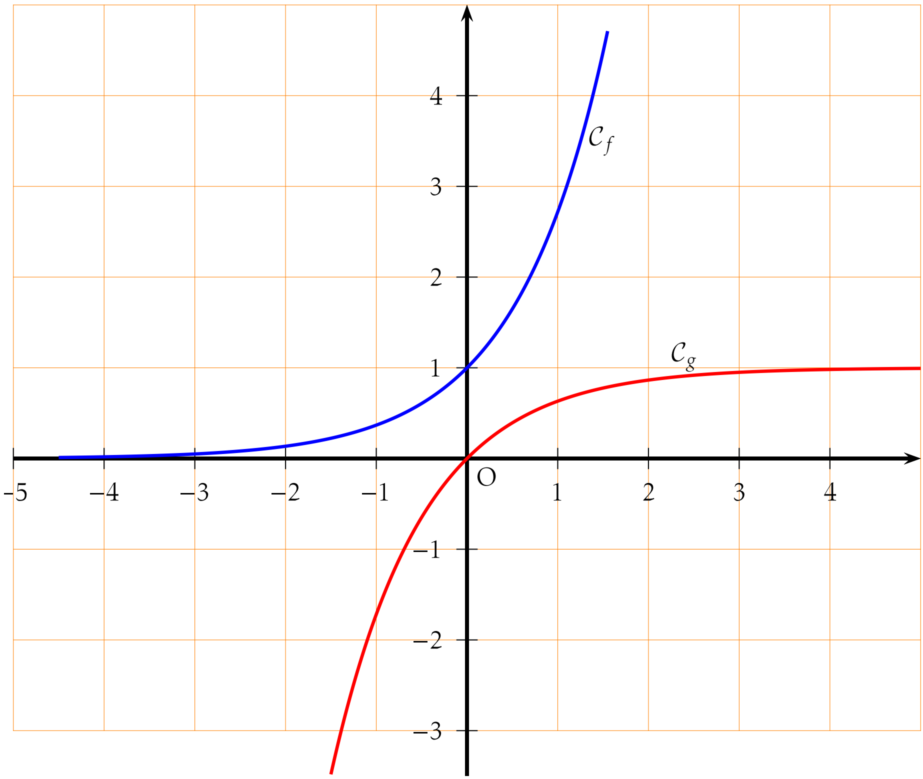
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

Nous venons de montrer que le coefficient directeur de (EF) est e^{α}, or $g'(-\alpha) = e^{\alpha}$, donc la droite (EF) est aussi la tangente à $\mathcal{C}_g$ passant par F (d'abscisse $-\alpha$).

ANNEXE : à rendre avec la copie

n° d'anonymat ....

Exercice 4 – Partie A



À faire sur une copie à part

Exercice 5 — Uniquement pour les SPÉ MATHS *5 points*

Partie A –

On définit une matrice M, une suite (p_n) de réels compris entre 0 et 1 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ une matrice X_n et les matrices A et B telles que :

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ 1 - p_n \end{pmatrix} \text{avec } p_0 = 0 \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

On admet que pour tout entier naturel n, $\mathrm{X}_n = \mathrm{M}^n \times \mathrm{X}_0$

1. Vérifier que (1) $\mathrm{M} = \mathrm{A} + 0,5\mathrm{B}$ (2) $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ et (3) $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\mathrm{M}^n = \mathrm{A} + 0,5^n\mathrm{B}$
3. En déduire que pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$

Partie B –

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. On suppose $m \leqslant 4$.
   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.
   a) Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.
   c) En déduire que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
   d) Pour $m \geqslant 5$, existe-t-il des couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).