C08

NOMS .... et ....

Exercice 1 — Étude de fonction

13 points

Un prof de maths décide de personnaliser ses contrôles de la façon suivante : « dans ce qui suit m est le numéro de votre mois de naissance (avec janvier=1, février=2, …, décembre=12 ».

Il décide de faire travailler ses élèves sur la fonction suivante :

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = m \times \ln\left(x - \dfrac{m}{2}\right) - x$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative.

Il s'aperçoit alors que les « sommets » des courbes obtenues semblent être sur une parabole (les « sommets » sont placés sur le graphique).

Le but de cet exercice est vérifier cette conjecture.

> Pour l'étude de la fonction vous avez le choix de travailler…
>
> ☐ avec $m =$ ....
>
> ☐ dans le cas général (pas de valeur particulière pour m).

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_m.

il faut $x - \dfrac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{m}{2}$ | $\mathrm{D}_{f_m} = \left]\dfrac{m}{2}\,;+\infty\right[$

2. Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
Aide : vérifier (en détaillant les calculs, que $f_m(x) = x\left(m\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + m\ln\left(1 - \dfrac{m}{2x}\right)$

Soit $g(x) = x\left(m\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + m\ln\left(1 - \dfrac{m}{2x}\right)$

$g(x) = m\ln x - x + m\ln\left(1 - \dfrac{m}{2x}\right) = m\left(\ln x + \ln\left(1 - \dfrac{m}{2x}\right)\right) - x$

$= m\ln\left(x \times \left(1 - \dfrac{m}{2x}\right)\right) - x = m\ln\left(x - \dfrac{m}{2}\right) - x = f_m(x)$

On sait que $\lim\limits_{x \to \frac{m}{2}^+} x - \dfrac{m}{2} = 0^+$, donc $\lim\limits_{x \to \frac{m}{2}^+} \ln\left(x - \dfrac{m}{2}\right) = -\infty$

comme $m > 0$, on en déduit $\lim\limits_{x \to \frac{m}{2}^+} m \ln\left(x - \dfrac{m}{2}\right) - x = -\infty$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(x - \dfrac{m}{2}\right) = +\infty$, donc la limite de f_m est indéterminée.

Mais on sait que $f_m(x) = x\left(m\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + m\ln\left(1 - \dfrac{m}{2x}\right)$

et d'après le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

de plus $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{m}{2x} = 0^+$ (car $m > 0$)

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \dfrac{m}{2x}\right) = \ln(1) = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(m\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$

3. Interpréter graphiquement les résultats obtenus sur les limites.

Comme $\lim\limits_{x \to \frac{m}{2}^+} f_m(x) = -\infty$, $\mathscr{C}_m$ admet une asymptote d'équation $x = \dfrac{m}{2}$.

4. Donner la dérivée de la fonction f_m et en déduire le tableau de variations de f_m.

$f_m(x) = m \times \ln\left(x - \dfrac{m}{2}\right) - x$

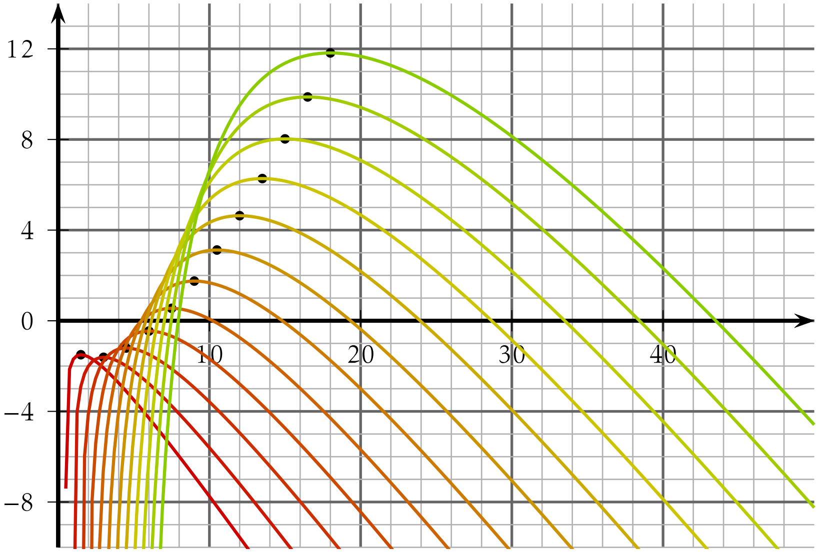
$$f'_m(x) = m \times \frac{1}{x - \frac{m}{2}} - 1 = \frac{\frac{3}{2}m - x}{x - \frac{m}{2}}$$

Or sur $\left]\dfrac{m}{2}\,;+\infty\right[$, $x - \dfrac{m}{2} > 0$, donc $f'_m(x)$ est du signe de $\left(\dfrac{3}{2}m - x\right)$.

$$f\left(\frac{3m}{2}\right) = m \times \ln\left(\frac{3m}{2} - \frac{m}{2}\right) - \frac{3m}{2} = m\ln(m) - \frac{3m}{2}$$

x	$\frac{m}{2}$		$\frac{3m}{2}$		$+\infty$
signe de $f_m'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
variations de f_m	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$m\ln(m) - \frac{3m}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_m$ correspondant à votre valeur de m dans le repère proposé. (Si vous travaillez dans le cas général, choisir une valeur de m.)



6. Les points S_m qui représentent les « sommets » des courbes $\mathscr{C}_m$ appartiennent-ils à une parabole ? Justifier.

idée 1 : On a $x_S = \frac{3m}{2}$ et $y_S = m\ln(m) - \frac{3m}{2}$, donc $m = \frac{2x_S}{3}$,

donc $y_S = \frac{2x_S}{3}\ln\left(\frac{2x_S}{3}\right) - \frac{3\times\frac{2x_S}{3}}{2}$
$= \frac{2x_S}{3}\ln\left(\frac{2x_S}{3}\right) - x$

y_S n'est pas fonction d'un polynôme de degré 2 en x_S.

idée 2 : Lire les coordonnées d'au moins 4 points et infirmer la conjecture.

idée 3 : Calculer les coordonnées d'au moins points et infirmer la conjecture. (long ?)

Exercice 2 — Une suite

7 points

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3 et u_4.

$u_1 = \ln\left(1+\dfrac{1}{1}\right) = \ln 2$

$u_2 = \ln\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

$u_3 = \ln\left(1+\dfrac{1}{3}\right) = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$

$u_4 = \ln\left(1+\dfrac{1}{4}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$

2. Déterminer la limite de (u_n) en $+\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3. Soit $S_n = u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Conjecturer, puis déterminer la limite de S_n quand n tends vers $+\infty$.

a) On peut commencer par calculer quelques valeurs de S_n (à la main, à l'aide de la calculatrice, à l'aide d'un algorithme…)
Le calcul à la main permet de mieux comprendre les simplifications.

$S_2 = u_1+u_2 = \ln 2+\ln\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(2\times\dfrac{3}{2}\right) = \ln 3$

$S_3 = S_2+u_3 = \ln 3+\ln\left(\dfrac{4}{3}\right) = \ln\left(3\times\dfrac{4}{3}\right) = \ln 4$

$S_4 = S_3+u_4 = \ln 4+\ln\left(\dfrac{5}{4}\right) = \ln\left(4\times\dfrac{5}{4}\right) = \ln 5$

b) On conjecture que $S_n = \ln(n+1)$ et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

c) Démontrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*, S_n = \ln(n+1)$.

Initialisation Si $n=1$, $S_n = u_1 = \ln 2 = \ln(1+1)$.
La propriété est vraie au rang 1.

Hypothèse de récurrence Supposons qu'au rang p, on ait : $S_p = \ln(p+1)$, démontrons qu'au rang $(p+1)$ on a alors $S_{p+1} = \ln(p+2)$.

Démonstration $S_{p+1} = S_p + u_{p+1}$

$$= \ln(p+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{p+1}\right)$$

$$= \ln(p+1) + \ln \frac{p+2}{p+1}$$

$$= \ln\left((p+1) \times \frac{p+2}{p+1}\right)$$

$$= \ln(p+2).$$

Conclusion Si la propriété est vraie au rang p alors elle l'est au rang $(p+1)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n = \ln(n+1)$.

d) On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.