	bilan des compétences			5,5
CHR	0			0
MOD	2			1,75
REP	1			0,5
CAL	3			2,75
RAI	0			0
COM	1			0,5
	bilan des connaissances			14,5
FCT07	1			1
FCT10	2			2,5
FCT11	1			1
FCT13	1			1
INT01	1			0,5
INT02	3			3
INT03	1			1,5
INT04	4			4

correction			
CAL	1.1 Résoudre eq. Deg 2		1,5
CAL	1.2 simplifier fct rationnelle		0,5
INT02	primitive fct cst		1
INT02	Primitive 1/x		1
INT02	Primitive 1/x²		1
INT04	calcul intégrale		1
	total		6
FCT11	2.1 dériver produit avec ln		1
INT04	2.2 calcul intégrale		1
FCT13	calcul ln(e) et ln(1)		1
	total		3
INT01	3.1 domaine → intégrale		0,5
FCT07	primitive fct trigo		1
INT04	calcul intégrale		1
MOD	3.2 mise en équation		0,75
CAL	résoudre eq. Deg 2		0,75
	total		4
REP	4.1 Lire sol equation		0,5
FCT10	équation exp / ln		1,5
INT04	4.2 valeur moyenne : def		1
INT03	primitive exp(u)		1,5
COM	calcul intégrale / argumenter		0,5
MOD	4.3 modélisation limite		1
FCT10	limite expo		1
	total		7

C09

Exercice 1 — *6 points*

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2}$.

1. Déterminer le(s) antécédent(s) de 0.

On cherche les valeurs de x tels que $f(x)=0$. C'est à dire $2x^2-3x+1=0$.

Une solution évidente est $x=1$, on en déduit que l'autre est $x=\dfrac{1}{2}$.

2. Après avoir simplifié l'écriture de f, calculer $\mathrm{I}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2}=2-3\times\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

Donc $\mathrm{I}=\left[2x-3\ln x-\dfrac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}}=2\,\mathrm{e}-3\ln\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\left(2-3\ln 1-\dfrac{1}{1}\right)=2\,\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}-4$

Exercice 2 — *3 points*

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=x\ln(x)-x$ est une primitive de la fonction ln.

On cherche la dérivée de F.

$\mathrm{F}'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}-1=\ln(x)$.

Donc F est bien une primitive de ln.

2. En déduire $\mathrm{I}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x$.

$\mathrm{I}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x=[x\ln(x)-x]_1^{\mathrm{e}}=(\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})-\mathrm{e}-(1\ln(1)-1)=\mathrm{e}\times 1-\mathrm{e}-(1\times 0-1)=1$

Exercice 3 — *4 points*

D'après Bac S, Nouvelle Calédonie, 2015 - novembre

Soit le domaine délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = a\cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{a}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ pour des valeurs de a inférieures à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathcal{C}$ est proportionnelle à a en unités d'aire.

Comme la fonction est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, l'aire du domaine est donnée par $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\,\mathrm{d}x = [a\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$ $a\sin\dfrac{\pi}{2} - a\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = a\times 1 - a\times(-1) = 2a$

2. L'aire du disque peut-elle être égale à l'aire de la surface grisée ? Si oui, quelle valeur faut-il donner au réel a ?

On veut que $2a - \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4}a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a\left(\dfrac{\pi}{4}a - 1\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $a = \dfrac{4}{\pi}$

Comme $\dfrac{4}{\pi} < 1{,}4$, on peut avoir l'aire de la partie grisée égale à celle du disque.

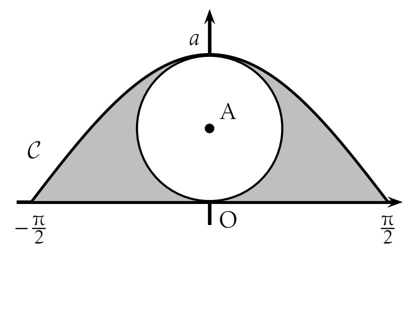

figure exercice 3.

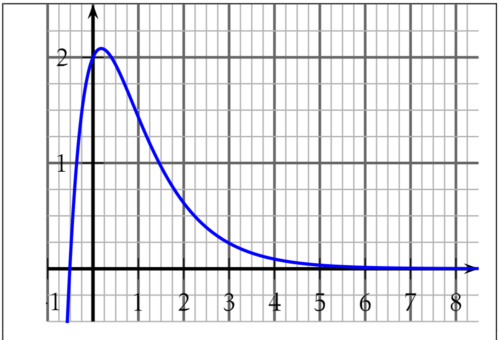

figure exercice 4.

Exercice 4 —

7 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Soit α tel que $f(\alpha) = 0$. Lire sur le graphique une valeur approchée de α, puis calculer sa valeur exacte.

   On lit $\alpha \simeq -0{,}5$.
   On cherche α tel que $5\,\mathrm{e}^{-\alpha} - 3\,\mathrm{e}^{-2\alpha} = 0$ en multipliant chaque membre de l'expression par $\mathrm{e}^{2\alpha}$ on obtient
   $5\,\mathrm{e}^{\alpha} - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\alpha} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \alpha = \ln\frac{3}{5}$

2. Arnufle affirme que la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est 0,5 !
   Que pensez de cette affirmation ? (Merci de ne pas répondre « il a raison » ou « il a tort » sans un minimum d'argumentation !)

   Par définition, la valeur moyenne μ, est donnée par : $\mu = \frac{1}{7}\int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   $$\mu = \frac{1}{7}\int_0^7 5\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$
   $$= \frac{1}{7}\left[-5\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^7$$
   $$= \frac{1}{7}\left(-5\,\mathrm{e}^{-7} + \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-14} - \left(-5 + \frac{3}{2}\right)\right)$$
   $$= -\frac{5}{7}\,\mathrm{e}^{-7} + \frac{3}{14}\,\mathrm{e}^{-14} + \frac{1}{2}$$
   $\neq$ 0,5 car les exponentielles ne se simplifient pas.

3. Barnabé a démontré que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et que la fonction f est strictement positive sur $[0\,;+\infty[$. (Et il a raison sur ces deux points.)

Il affirme donc que l'aire du domaine défini par l'axe abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = t$ tend vers une valeur finie quand t tend vers $+\infty$.

Que pensez de cette affirmation ? (Ici aussi, merci de ne pas répondre « il a raison » ou « il a tort » sans un minimum d'argumentation !)

Pour répondre il faut calculer : $\lim\limits_{t\to+\infty}\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$	Or $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = -5\,\mathrm{e}^{-5t}+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{7}{2}$ d'après les calculs effectués à la question précédente. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} -5\,\mathrm{e}^{-5t}+\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{7}{2} = \frac{7}{2}$, Barnabé a raison !