BAC-BLANC-2

Énoncés et corrigés d'après l'A.P.M.E.P http://www.apmep.fr

- **L'exercice** 5 est uniquement pour les élèves **non spécialité maths**
- **L'exercice 6** est uniquement pour les élèves spécialité maths : il est à rendre sur une feuille séparée.

Exercice 1 — *4 points*

Centres étrangers – 12 juin 2014 – exercice 1 ***Commun à tous les candidats***

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes.
Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750 **b.** 0,150 **c.** 0,462 **d.** 0,700

Soit F l'événement « Le client est une femme » et B l'événement « le client achète un article au rayon bricolage. »
$p_B(F) = \dfrac{p(B\cap F)}{p(B)}$.

Or $p(B) = p(B\cap F) + p(B\cap H)$
$= 0{,}75\times\dfrac{1}{5} + 0{,}25\times\dfrac{7}{10}$
$= 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$.
D'où $p_B(F) = \dfrac{0{,}15}{0{,}325}$
$= \dfrac{150}{325} = \dfrac{6}{13} \approx 0{,}462$.

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900 **b.** 0,092 **c.** 0,002 **d.** 0,267

On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

À l'aide de la calculatrice (fonction `binomFdb`) on trouve $p \approx 0{,}267$

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \dfrac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. $0,750$	**b.** $0,250$	**c.** $0,472$	**d.** $0,528$

On se pose la question : « Je viens d'acheter mon téléviseur, quelle est la probabilité qu'il fonctionne au moins 6 ans ? ».

On cherche donc $p(X \geqslant 6)$
$p(X \geqslant 6) = 1 - p(X < 6) = e^{\frac{1}{8}\times 6} \approx 0{,}472$

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g.

La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. $0,16$	**b.** $0,32$	**c.** $0,84$	**d.** $0,48$

On sait que « La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à $0,954$. », or on sait que
$p(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0{,}95)$

on en déduit que $\sigma = 8$.
À l'aide de la calculatrice (fonction `normalFRep`, en prenant 10^{-99} pour borne inférieure) on trouve
$p(X \leqslant 192) \approx 0{,}158$

Exercice 2 — *4 points*

Centres étrangers – 12 juin 2014 – exercice 2 **Commun à tous les candidats**

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par :

$$\begin{cases} z_0 & = 16 \\ z_{n+1} & = \dfrac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a)** Calculer z_1, z_2 et z_3.

$z_1 = \dfrac{1+i}{2} z_0$
$= \dfrac{1+i}{2} \times 16$
$= 8(1+i)$

$z_2 = \dfrac{1+i}{2} z_1$
$= \dfrac{1+i}{2} \times 8(1+i)$
$= 4(1+i)^2$
$= 4(1+2i+i^2)$
$= 8i$

$z_3 = \dfrac{1+i}{2} z_2$
$= \dfrac{1+i}{2} \times 8i$
$= 4i - 4$

b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie**.

c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

À l'aide d'un graphique (diagonale du carré de côté 1) : le complexe $1+i$ est égal à $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

donc $\dfrac{1+i}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

On sait que $OA_0 = |z_0| = 16$
et que $OA_1 = |z_1| = |8(1+i)|$ or on sait (diagonale du carré) que $|1+i| = \sqrt{2}$, donc $|z_1| = 8\sqrt{2}$
$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |-8+8i| = 8|-1+i|$ or on sait que $|-1+i| = \sqrt{2}$ (diagonale du carré) donc $A_0A_1 = 8\sqrt{2}$

nous avons donc $A_0A_1 = OA_1$: le triangle OA_1A_0 est isocèle en A_1 et $OA_0^2 = OA_1^2 + A_0A_1^2$, donc le triangle OA_1A_0 est rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque : on a déjà calculé $r_0 = |z_0| = 16$, $r_1 = |z_1| = 8\sqrt{2}$ et $r_2 = |z_2| = 4$, ce qui justifie la question.
$r_{n+1} = |z_{n+1}|$
$r_{n+1} = \left|\dfrac{1+i}{2}z_n\right| r_{n+1} = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| \times |z_n|$

or le module du produit est égal au produit des modules, donc $r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}r_n$.
ce qui montre que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ?

la raison de la suite est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ qui appartient à $[-1;1]$, donc la suite converge vers 0.

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

Le module des nombres z_n tend vers 0, donc les points A_n vont converger vers l'origine.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

$A_nA_{n+1} = |z_{n+1} - z_n|$
$= \left|\dfrac{1+i}{2}z_n - z_n\right|$
$= \left|z_n\left(\dfrac{1+i}{2} - 1\right)\right|$
$= |z_n|\left|\dfrac{-1+i}{2}\right|$

or $|-1+i| = \sqrt{2}$
donc $A_nA_{n+1} = r_n\dfrac{\sqrt{2}}{2} = r_{n+1}$.

b) Donner une expression de L_n en fonction de n.

$L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1}$
$= \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} r_{i+1}$
$= r_1 + r_2 + \ldots + r_n$

$= r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_n - r_0$
$= \dfrac{1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}} \times 16 - 16$
avec $r_0 = 16$.

c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} = 0$,

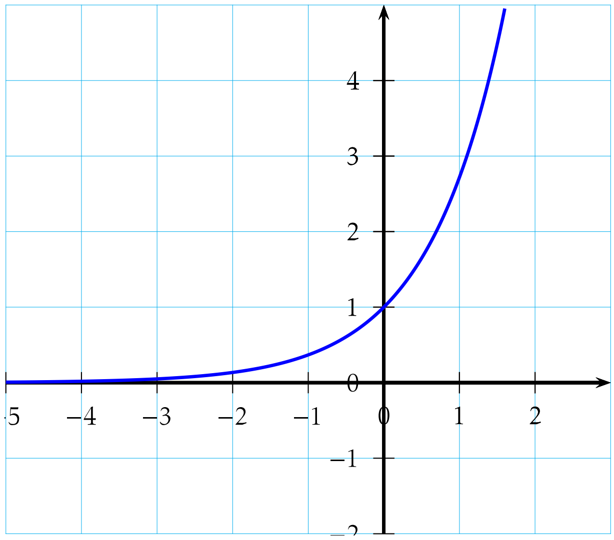
donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n = \dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \times 16 - 16 = 16\sqrt{2} + 16$ (à l'aide de la calculatrice)

Exercice 3 —

3 points

Liban 27 mai 2015 – exercice 3 **Commun à tous les candidats**

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \mathrm{e}^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note $\mathcal{D}_m$ la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = \mathrm{e}$.
Démontrer que la droite $\mathcal{D}_\mathrm{e}$, d'équation $y = \mathrm{e}\, x$, est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1.

Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f'(x) = \mathrm{e}^x$ et $f'(1) = \mathrm{e}$.	L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e} = \mathrm{e}\, x$

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}_m$.

On conjecture que :

- Si $m < \mathrm{e}$, il n'y a aucun point d'intersection.
- Si $m = \mathrm{e}$, il y a un point d'intersection.
- Si $m > \mathrm{e}$ il y a deux points d'intersection.

3. Démontrer cette conjecture.

Le point M de coordonnées $(x\,;y)$ est un point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}_m$ si et seulement si $\mathrm{e}^x = mx \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - mx = 0$

Posons $g(x) = \mathrm{e}^x - mx$, et cherchons les valeurs de x telles que $g(x) = 0$

Étude de g

dérivée $g'(x) = \mathrm{e}^x - m$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > m \Leftrightarrow x > \ln m$ (car $m > 0$)

limite en $-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$

car $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} -mx = +\infty$ (car $m > 0$).

limite en $+\infty$ $g(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} - m\right)$,

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, (limite du cours)

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de g	$+\infty$	$\searrow$	$m(1-\ln m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Interprétation du tableau

- si $m(1-\ln(m)) > 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution ;
- si $m(1-\ln(m)) = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution ;
- si $m(1-\ln(m)) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions

Or $m > 0$, donc $m(1-\ln(m)) < 0 \Leftrightarrow 1-\ln(m) < 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(m) \Leftrightarrow \mathrm{e} > m$

Donc

- si $m < \mathrm{e}$, $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{C}$ n'auront aucun point d'intersection ;
- si $m = \mathrm{e}$, $\mathcal{D}_m$ est tangente à $\mathcal{C}$;
- si $m > \mathrm{e}$, $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{C}$ auront deux points d'intersection.

Exercice 4 —

4 points

Amérique du Sud 24 novembre 2015 – exerice 2 **Commun à tous les candidats**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k}\right)$. Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :
A$(3\,;-1\,;4)$ B$(-1\,;2\,;-3)$ C$(4\,;-1\,;2)$

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $2x-3y+2z-7=0$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1+4t \\ y = 4-t \\ z = -8+2t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

À l'aide de l'écriture paramétrique de Δ on connaît un vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(4\,;-1\,;2)$.
La droite (AC) a pour vecteur directeur
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(4-3\,;-1-(-1)\,;2-4) = (1\,;0\,;-2)$.

$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4\times1+(-1)\times0+2\times(-2) = 0$

donc les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont orthogonaux ; d'où les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 1 vraie

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x+5y+z-5=0$.

Pour que les points déterminent un plan, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne soient pas colinéaires.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-(-1) \\ -3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -1-(-1) \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Les vecteurs ne sont donc pas colinéaires (il n'existe pas de réel k, tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$), donc les points A, B et C définissent un plan.

Si les points appartiennent au plan, leurs coordonnées vérifient l'équation proposée.

point A $2\times3+5\times(-1)+4-5=0$; le point A appartient au plan d'équation $2x+5y+z-5=0$

point B $2\times(-1)+5\times2+(-3)-5=0$; le point B appartient au plan d'équation $2x+5y+z-5=0$

point C $2\times4+5\times(-1)+2-5=0$; le point C appartient au plan d'équation $2x+5y+z-5=0$

donc $2x+5y+z-5=0$ est une équation du plan (ABC).

Affirmation 2 vraie

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont données par

$$\begin{cases} x = 1+s-2s' \\ y = 1-2s+s' \\ z = 1-4s+2s' \end{cases}, \quad s\in\mathbb{R},\ s'\in\mathbb{R}$$

appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

Soient s et s' deux réels et M le point de coordonnées $(1+s-2s' ; 1-2s+s' ; 1-4s+2s')$.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x-3y+2z-7=0$.

$2x_M-3y_M+2z_M-7 = 2(1+s-2s')-3(1-2s+s')+2(1-4s+2s')-7$

$=2+2s-4s'-3+6s-3s'+2-8s+4s'-7$

$=-6-3s'$

n'est pas égal à 0 pour tout s'.

Affirmation 3 fausse

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite Δ.

Il existe un plan parallèle au plan $\mathcal{P}$ qui contient la droite Δ si et seulement si la droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(4 ; -1 ; 2)$. Le plan $\mathcal{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(2 ; -3 ; 2)$.

La droite Δ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = 4\times2+(-1)\times(-3)+2\times2 = 15 \neq 0$

donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que la droite Δ n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Affirmation 4 fausse

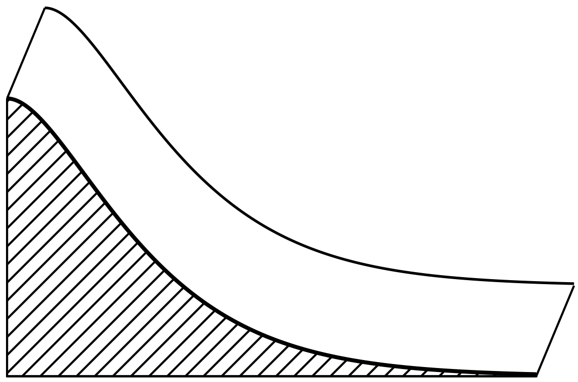
Exercice 5 —

5 points

Polynésie 12 juin 2015 – exerice 4 **Uniquement pour les élèves non spécialité maths**

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

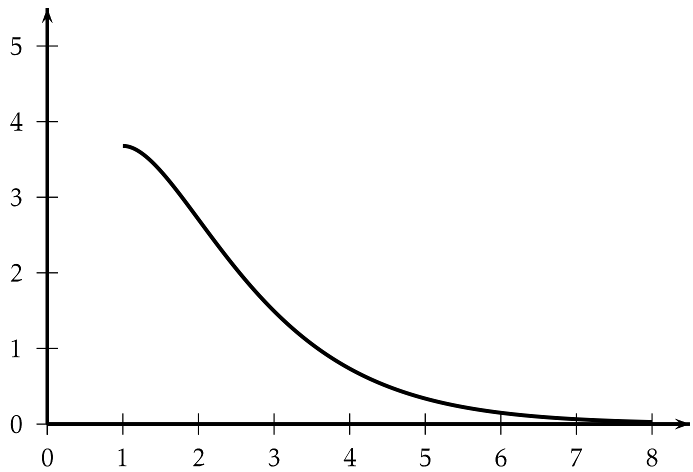
Voici ce schéma :



Partie A – Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par $f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x}$, où a et b sont deux entiers naturels.

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
Déterminer la valeur de l'entier b.

On sait que le coefficient directeur de la tangente en un point est le nombre dérivé de la fonction en ce point. Il faut donc que $f'(1) = 0$.
Or f est dérivable sur $[1\,;8]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = a\,\mathrm{e}^{-x} + (ax+b)\times(-1)\,\mathrm{e}^{-x}$
$= \mathrm{e}^{-x}(a - ax - b)$

Donc $f'(1) = 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-1}(a - a - b) = 1$
$\Leftrightarrow -b\,\mathrm{e}^{-1} = 0$
$\Leftrightarrow b = 0$ (car $\mathrm{e}^{-1} \neq 0$)

2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres de haut.
Déterminer la valeur de l'entier a.

Le haut de la courbe est obtenu pour $x = 1$. Or : $3,5 < f(1) < 4$
$\Leftrightarrow 3,5 < a\,\mathrm{e}^{-1} < 4$
$\Leftrightarrow 3,5\mathrm{e} < a < 4\mathrm{e}$.

Or $3,5\mathrm{e} \approx 9,5$ et $4\mathrm{e} \approx 10,9$: le seul entier compris entre ces deux valeurs est $a = 10$.
On a donc sur $[1\,;\ 8]$, $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.

Partie B – Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1\,;\,8]$ par $f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}$.

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;\,8]$ par $g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

g est de la forme $u \times v$ avec
$u(x) = 10(-x-1)$ et $u'(x) = -10$
$v(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

d'où $g'(x) = -10\mathrm{e}^{-x} + 10(-x-1) \times (-1)\mathrm{e}^{-x}$
$= -10\mathrm{e}^{-x}(1-x-1)$
$= 10x\mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
Remarque : g est donc une primitive de f sur $[1\,;8]$.

2. Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Comme $x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, on a $f(x) > 0$ sur $[1\,;\,8]$. Donc l'aire de la surface hachurée est égale en unités d'aire à l'intégrale :
$\displaystyle\int_1^8 f(x)\,\mathrm{d}x = [g(x)]_1^8 = g(8) - g(1)$
$= 10(-8-1)\mathrm{e}^{-8} - 10(-1-1)\mathrm{e}^{-1}$
$= 20\mathrm{e}^{-1} - 90\mathrm{e}^{-8}$.

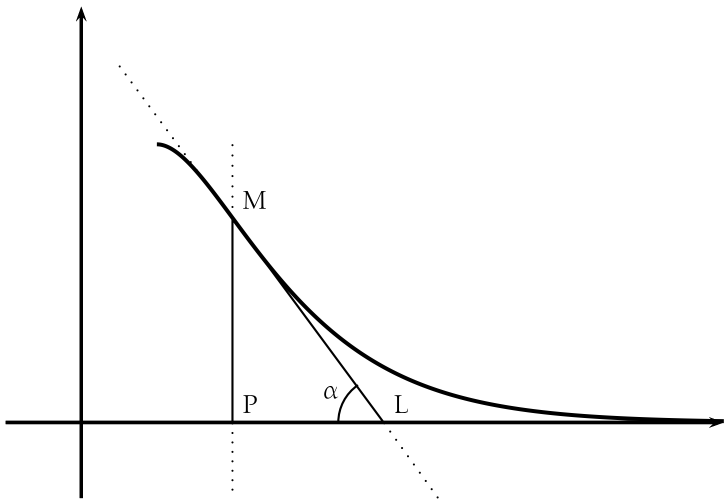
D'après les conditions du peintre son devis D sera donc d'un montant de :
$\mathrm{D} = 300 + 50\left(20\mathrm{e}^{-1} - 90\mathrm{e}^{-8}\right) \approx 666,37$ €.

Partie C – Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;\,8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;\,8]$.

La fonction f' est dérivable sur $[1\,;\,8]$ et sur cet intervalle :
$f''(x) = 10 \times (-1)e^{-x}$
$+ 10(1-x) \times (-1)e^{-x}$
$= 10(x-2)e^{-x}$.
Comme $e^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui de $x-2$.

D'où le tableau de variations :

x	1	2	8
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
variations de f'	0 ↘	$-1{,}35$	↗ $-0{,}02$

2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.

Par définition, le nombre dérivé représente la pente de la tangente, $|f'(x_M)| = \dfrac{MP}{PL}$ (car MP devrait être compté en négatif).

Dans le triangle MPL rectangle en P, $\tan\alpha = \dfrac{MP}{PL}$, d'où $|f'(x)| = \tan\alpha$

3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

D'après le tableau de variations de f', on sait que $|f'(x)| \leqslant 1{,}35$

Or $1{,}35 \approx \tan 53{,}47° < 55°$. Le toboggan est conforme.

Exercice 6 —

5 points

Un bel exercice de M^me^ Gilles ;-) **Uniquement pour les élèves spécialité maths – à rendre sur une copie à part.**

On rappelle le théorème de Fermat :

> Si p est un nombre premier et a un entier non multiple de p, alors $a^{p-1} \equiv 1(\text{modulo } p)$

Partie A –

Lors d'une fête au lycée, un bateleur propose aux élèves de spécialité maths le jeu suivant :

« Je vous donne un tableau de correspondance lettre-nombre. Pensez aux deux nombres qui correspondent à vos initiales : x_1 et x_2.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

Calculer y_1 et y_2 tels que :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculer le reste r_1 de la division de y_1 par 23 et le reste r_2 de la division de y_2 par 23. À l'aide du tableau, donnez moi le résultat sous forme de deux lettres et je devinerai vos initiales. »

1. Codez vos initiales (nom - prénom)

Pour F et L, $x_1 = 5$ et $x_2 = 11$
donc $y_1 = 8x_1 + 5x_2 = 95$ et $y_2 = 3x_1 + 2x_2 = 37$ (ou bien à l'aide de la calculatrice…)

puis $r_1 = 3$ et $r_2 = 14$ d'où les lettres D et O.

2. Trouvez la méthode de décodage du bateleur. Appliquez la à vos initiales, comme si celles-ci étaient le résultat du codage.

On a $y_1 = 8x_1 + 5x_2 = 23q_1 + r_1$
et $y_2 = 3x_1 + 2x_2 = 23q_2 + r_2$
Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, alors, à l'aide de la calculatrice,
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$
puis $A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \times A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
donc $x_1 = 2y_1 - 5y_2$
$= 2(23q_1 + r_1) - 5(23q_2 + r_2)$
$= 23(2q_1 - 5q_2) + 2r_1 - 5r_2$
et $x_2 = -3y_1 + 8y_2$
$= -3(23q_1 + r_1) + 8(23q_2 + r_2)$
$= 23(-3q_1 + 8q_2) - 3r_1 + 8r_2$
Or x_1 et x_2 sont strictement inférieurs à 23,
donc $x_1 \equiv 2r_1 - 5r_2$modulo 23
et $x_2 \equiv -3r_1 + 8r_2$modulo 23
En partant de D ($y_1 = 3$) et O ($y_2 = 11$),
on trouve : $\begin{cases} x_1 = 2 \times 3 - 5 \times 14 \\ x_2 = -3 \times 3 + 8 \times 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -18 \\ x_2 = 11 \end{cases}$
Or $-18 \equiv 5$modulo 23, on retrouve bien les lettres F et L !

Si F et L sont les résultats du codage, $y_1 = 5$ et $y_2 = 11$, on trouve $x_1 = -22$, or $-22 \equiv 1 \bmod 23$, et $x_2 = 4$. Les lettres initiales étaient B et E.

Partie B –

Un élève dévoile le secret, le bateleur change alors de codage et réintroduit dans le tableau les lettres de l'alphabet manquantes : il donne une clef e égale à 7.

Lorsqu'un élève pense à une lettre, il la converti selon le tableau en un nombre m, calcule m^e, puis le reste de la division de m^e par 26 et donne la lettre codée à l'aide du tableau.

1. Codez l'initiale de votre prénom.

pour F ($m = 5$), $m^e = 5^7 = 78\,125$, le reste de la division par 26 est 21, la lettre codée est V.

2. Résolvez l'équation diophantienne $7x + 12y = 1$ dans $\mathbb{Z}$.
3. Trouvez l'unique entier d, compris entre 1 et 11 tel que ed soit congru à 1 modulo 12.
4. Démontrer que pour tout m entier compris entre 0 et 25, 13 divise $m^{ed} - m$.
5. Démontrer que pour tout m entier compris entre 0 et 25, 26 divise $m^{ed} - m$.
6. On vous donne comme code la lettre L. Quelle était la lettre de départ ?

Annexe relative à l'exercice 2.