correction		**20**
	p 53 n° 26	
CHR	conjecture (suite décroissante)	1
SUI01	récurrence : init	1
SUI01	récurrence : hérédité	1
SUI01	récurrence : demonstration	2
SUI01	récurrence : conclusion	1
	total	**6**
	p 57 n° 57	
RAI	dem égalité : méthode	1
CAL	dem égalité : calculs	2
MOD	algo : écriture	3
	algo : valeur obtenue	1
CAL	calcul formel : formules	2
	calcul formel : valeur exacte	1
CAL	démonstration : méthode	2
CAL	démonstration : calculs	2
	total	**14**

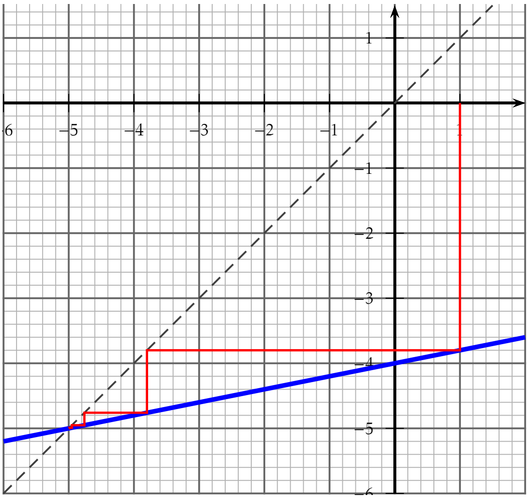
DM01

Exercice 1 — p 53 n° 26

On cherche le sens de variations de (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -4 + \dfrac{u_n}{5}$

À l'aide de la calculatrice : la suite semble décroissante.

On peut construire le graphique :



Démontrons par récurrence que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Initialisation pour $n = 1$ on a $u_1 = -4 + \dfrac{u_0}{5} = -4$;

donc $u_1 < u_0$.

Hypothèse de récurrence Supposons qu'au rang p, la propriété « $u_{p+1} < u_p$ » est vraie ;

démontrons qu'au rang $p+1$, la propriété « $u_{p+2} < u_{p+1}$ » est encore vraie.

Démonstration on sait que $u_{p+1} < u_p$

la fonction f définie par $f(x) = 4 - \dfrac{x}{5}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f(u_{p+1}) < f(u_p)$ c'est à dire $u_{p+2} < u_{p+1}$

Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 2 — p 57 n° 57

Partie A – Égalité

On veut démontrer l'égalité : $\sqrt{1 + \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{(p+1)^2}} = 1 + \dfrac{1}{p(p+1)}$

Soit $\mathrm{G} = 1 + \dfrac{1}{p(p+1)}$

donc $\mathrm{G}^2 = \left(1 + \dfrac{1}{p(p+1)}\right)^2$

$= 1 + \dfrac{2}{p(p+1)} + \dfrac{1}{p^2(p+1)^2} = 1 + \dfrac{2p(p+1)+1}{p^2(p+1)^2} = 1 + \dfrac{p^2 + (p^2 + 2p + 1)}{p^2(p+1)^2} = 1 + \dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{(1+p)^2}{p^2(p+1)^2} = 1 + \dfrac{1}{(p+1)^2} + \dfrac{1}{p^2}$

On retrouve le carré du membre de droite.

On en déduit que la somme

$$\mathrm{S}_n = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 \times 2} + 1 + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + 1 + \frac{1}{n(n+1)}$$

Partie B – Algorithme

On peut utiliser un algorithme pour trouver une valeur approchée de S_n, ou bien avec la somme des racines carrées, ou bien avec l'expression de la somme ne contenant que des inverses.

Algorithme 1 : avec les racines carrées

Données : la valeur de n
Sortie : une valeur approchée de S_n

```
S prend la valeur 0
pour k de 1 jusque n faire
    S prend la valeur S + sqrt(1 + 1/k^2 + 1/(k+1)^2)
fin
return S
```

$$S \text{ prend la valeur } S + \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$$

On trouve alors

- Ti : $S_{2015} \simeq 2\,015{,}999\,504$
- Casio :
- Algobox : $S_{2015} \simeq 2\,015{,}414\,2$

Algorithme 2 : avec les inverses

Données : la valeur de n
Sortie : une valeur approchée de S_n

```
S prend la valeur 0
pour k de 1 jusque n faire
    S prend la valeur S + 1 + 1/(k(k+1))
fin
return S
```

$$S \text{ prend la valeur } S + 1 + \frac{1}{k(k+1)}$$

On trouve alors

- Ti : $S_{2015} \simeq 2\,015{,}999\,504$
- Casio :
- Algobox : $S_{2015} \simeq 2\,015{,}999\,5$

Partie C – Calcul formel

À l'aide de Xcas :

```
S(n):=somme(sqrt(1+1/k^2+1/(k+1)^2),k,1,n)
```

```
// Interprète S
// Attention: k, déclarée(s) comme variable(s) globale(s) lors de la
```

$$n \quad \text{->}\ \text{somme}\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}},k,1,n\right)$$

```
S(2015)
```

$$\frac{4064255}{2016}$$

```
S(n):=somme(1+1/(k*(k+1)),k,1,n)
```

```
// Interprète S
// Attention: k, déclarée(s) comme variable(s) globale(s) lors de la
```

$$n \quad \text{->}\ \text{somme}\left(1+\frac{1}{k*(k+1)},k,1,n\right)$$

```
S(2015)
```

$$\frac{4064255}{2016}$$

Partie D – Démonstration

On sait que $S_n = 1 + \dfrac{1}{1\times 2} + 1 + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + 1 + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$S_n = n + \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\times(n+1)}$

On cherche a et b tels que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$

$\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \dfrac{(a+b)n+a}{n(n+1)}$

Il faut

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

d'où $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{-1}{n+1}$

donc $S_n = n + \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$S_n = n + 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n(n+2)}{n+1}$

donc $S_{2015} = \dfrac{2\,015 \times 2\,017}{2\,016} = \dfrac{4\,064\,255}{2016}$