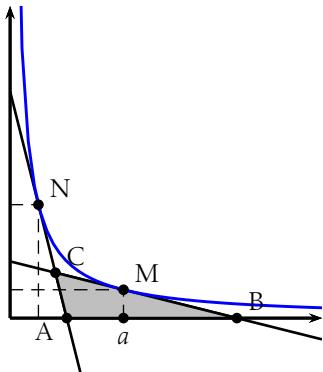


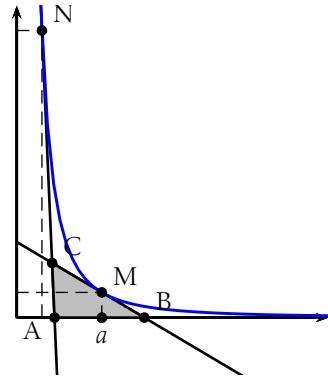
AIRES

NOM - Mois de naissance

1. La figure



avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$



avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

2. Fonction inverse

2.1 Coordonnées du point C

tangente en M : $T_M : y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$T_M : y = \frac{-1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a} = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a}$$

$$\text{tangente en } N : T_N : y = \frac{-1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2} \left(x - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{\frac{1}{a}}$$

$$T_N : y = -a^2 \left(x - \frac{1}{a}\right) + a = -a^2 x + 2a$$

l'abscisse du point C est solution de : $\frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a} = -a^2 x + 2a$

$$x - 2a = a^4 x - 2a^3$$

$$x = \frac{2a - 2a^3}{1 - a^4} \text{ avec } a \neq \pm 1$$

$$x = \frac{2a(1 - a^2)}{(1 - a^2)(1 + a^2)}$$

$$x = \frac{2a}{1 + a^2}$$

$$\text{donc } y = -a^2 \frac{2a}{1 + a^2} + 2a$$

$$y = \frac{-2a^3}{1 + a^2} + 2a$$

$$y = \frac{2a}{1 + a^2}$$

remarque : le point C est sur la droite d'équation $y = x$.

2.2 Coordonnées des points A et B

abscisse de A : on cherche x tel que $T_N : 0 = -a^2 x + 2a$

$$x = \frac{2}{a}$$

abscisse de B : on cherche x tel que $T_M : 0 = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

$$x = 2a$$

2.3 Aire du triangle ABC

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times y_C}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(2a - \frac{2}{a} \right) \times \frac{2a}{1+a^2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{a^2 - 1}{a} \times \frac{2a}{1+a^2}$$

$$\mathcal{A} = 2 \frac{a^2 - 1}{1 + a^2}$$

or on sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^2 - 1}{1 + a^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{a^2} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{A} = 2$$

3. Carré de la fonction inverse

3.1 Coordonnées du point C

tangente en M : $T_M : y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $f(x) = \frac{1}{x^2}$ et $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

$$T_M : y = \frac{-2}{a^3}(x - a) + \frac{1}{a^2} = \frac{-2}{a^3}x + \frac{3}{a^2}$$

$$\text{tangente en N : } T_N : y = \frac{-2}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3} \left(x - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2}$$

$$T_N : y = -2a^6 \left(x - \frac{1}{a^2} \right) + a^4 = -2a^6x + 3a^4$$

l'abscisse du point C est solution de : $\frac{-2}{a^3}x + \frac{3}{a^2} = -2a^6x + 3a^4$

$$(-2 + 2a^9)x = 3a^7 - 3a$$

$$x = \frac{3a(a^6 - 1)}{2(a^9 - 1)} \text{ avec } a \neq 1$$

$$\text{donc } y = -2a^6 \times \frac{3a(a^6 - 1)}{2(a^9 - 1)} + 3a^4$$

$$y = \frac{3a^7(a^6 - 1)}{1 - a^9} + \frac{3a^4 - 3a^{13}}{1 - a^9}$$

$$y = \frac{3a^4(1 - a^3)}{1 - a^9}$$

3.2 Coordonnées des points A et B

abscisse de A : on cherche x tel que $T_N : 0 = -2a^6x + 3a^4 = \frac{3a^4}{2a^6} = \frac{3}{2a^2}$

abscisse de B : on cherche x tel que $T_M : 0 = \frac{-2}{a^3}x + \frac{3}{a^2}$

$$x = \frac{3a^3}{2a^2} = \frac{3}{2}a$$

3.3 Aire du triangle ABC

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times y_C}{2}$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2a^2} \right) \times \frac{3a^4(1-a^3)}{1-a^9}$$

$$\mathcal{A} = \frac{3}{4} \times \frac{a^3-1}{a^2} \times \frac{3a^4(1-a^3)}{1-a^9}$$

$$\mathcal{A} = \frac{9}{4} \times \frac{a^2(1-a^3)^2}{a^9-1}$$

$$\mathcal{A} = \frac{9}{4} \times \frac{a^8 - 2a^5 + a^2}{a^9 - 1}$$

or on sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^8 - 2a^5 + a^2}{a^9 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^8}{a^9} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{A} = 0$$

4. Avec l'aide de Xcas

Les réponses données par Xcas aux calculs n'ont pas exactement la même forme que celles calculées ici « à la main ».

Essayer pour comparer !

remarque : comme on veut un cas général, la figure n'est pas construite... J'ai supposé $a > 1$ car dans le calcul « à la main » on s'aperçoit qu'il y a un problème de simplification. Cette contrainte n'est pas gênante, car on cherche une aire en $+\infty$.

Dans une fenêtre de géométrie :

```
f(x):=1/(x^2);
supposons(a>1);
M:=point(a,f(a));
TM:=LineTan(f(x),a);
N:=point(f(a),f(f(a)));
TN:=LineTan(f(x),f(a));
C:=inter_unique(TN,TM);
A:=inter_unique(TN,droite(y=0));
B:=inter_unique(TM,droite(y=0));
```

puis dans une ligne de commandes :
pour avoir l'expression de l'aire en
fonction de a

```
aire(triangle(A,B,C))
ou pour obtenir la limite immédiatement :
limit(aire(triangle(A,B,C)),a,+infinity)
```

The screenshot shows a software interface with a menu bar (Fig, Edit, Graphe, Repère) and a main window containing a list of commands. The commands are numbered 1 through 10. Lines 1-10 show the creation of a function f(x), assumptions about a, points M and N, lines TM and TN, and intersection points A and B. Line 11 shows the calculation of the area of triangle ABC.

```
1 Fig Edit Graphe Repère
1 f(x):=1/(x^2)
// Interprète f
// Succès lors de la compilation f
(x->1/x^2)
2 proposons(a>1)
a
3 M:=point(a,f(a))
point(a+(i)/(a^2))
4 TM:=LineTan(f(x),a)
droite(y=(-2/a^3*x+3/(a^2)))
5 N:=point(f(a),f(f(a)))
point(1/a^2+(i)/(1/a^4))
6 TN:=LineTan(f(x),f(a))
droite(y=(-2*a^6*x+3*a^4))
7 C:=inter_unique(TN,TM)
point(((3+6*i)*a^4+3*a)/(2*a^6+2*a^3+2))
8 A:=inter_unique(TN,droite(y=0))
point(3/(2*a^2))
9 B:=inter_unique(TM,droite(y=0))
point(3/2*a)
10
2 aire(triangle(A,B,C))
```

5. Et si...

Et si on prenait $f(x) = \frac{1}{x^3}$, quelle serait l'aire du triangle ABC quand l'abscisse de M tend vers $+\infty$?