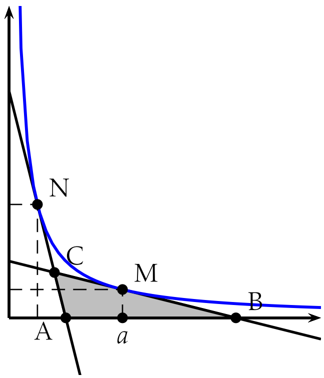
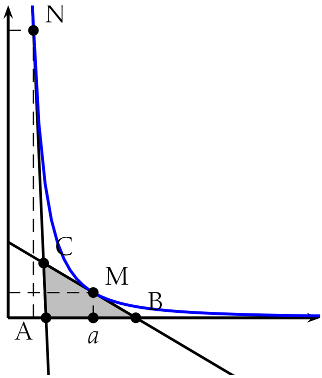
AIRES

NOM .... - Mois de naissance ....

1. La figure



avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$



avec la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$

2. Fonction inverse

2.1 Coordonnées du point C

tangente en M : $T_M : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$T_M : y = \dfrac{-1}{a^2}(x-a) + \dfrac{1}{a} = \dfrac{-1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$

tangente en N : $T_N : y = \dfrac{-1}{\left(\frac{1}{a}\right)^2}\left(x - \dfrac{1}{a}\right) + \dfrac{1}{\frac{1}{a}}$

$T_N : y = -a^2\left(x - \dfrac{1}{a}\right) + a = -a^2x + 2a$

l'abscisse du point C est solution de : $\dfrac{-1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} = -a^2x + 2a$

$x - 2a = a^4x - 2a^3$

$x = \dfrac{2a - 2a^3}{1 - a^4}$ avec $a \neq \pm 1$

$x = \dfrac{2a(1 - a^2)}{(1 - a^2)(1 + a^2)}$

$x = \dfrac{2a}{1 + a^2}$

donc $y = -a^2\dfrac{2a}{1 + a^2} + 2a$

$y = \dfrac{-2a^3}{1 + a^2} + 2a$

$y = \dfrac{2a}{1 + a^2}$

remarque : le point C est sur la droite d'équation $y = x$.

2.2 Coordonnées des points A et B

abscisse de A : on cherche x tel que $T_N : 0 = -a^2x + 2a$

$x = \dfrac{2}{a}$

abscisse de B : on cherche x tel que $T_M : 0 = \dfrac{-1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$

$x = 2a$

2.3 Aire du triangle ABC

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{AB} \times y_{\mathrm{C}}}{2}$$
$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left(2a - \frac{2}{a}\right) \times \frac{2a}{1+a^2}$$
$$\mathscr{A} = \frac{a^2-1}{a} \times \frac{2a}{1+a^2}$$

$$\mathscr{A} = 2\frac{a^2-1}{1+a^2}$$

or on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^2-1}{1+a^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^2}{a^2} = 1$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathscr{A} = 2$

3. Carré de la fonction inverse

3.1 Coordonnées du point C

tangente en M : $\mathrm{T_M} : y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

$$\mathrm{T_M} : y = \frac{-2}{a^3}(x-a) + \frac{1}{a^2} = \frac{-2}{a^3}x + \frac{3}{a^2}$$

tangente en N : $\mathrm{T_N} : y = \dfrac{-2}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^3}\left(x - \dfrac{1}{a^2}\right) + \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a^2}\right)^2}$

$$\mathrm{T_N} : y = -2a^6\left(x - \frac{1}{a^2}\right) + a^4 = -2a^6x + 3a^4$$

l'abscisse du point C est solution de : $\dfrac{-2}{a^3}x + \dfrac{3}{a^2} = -2a^6x + 3a^4$

$$(-2+2a^9)x = 3a^7 - 3a$$
$$x = \frac{3a(a^6-1)}{2(a^9-1)} \text{ avec } a \neq 1$$

donc $y = -2a^6 \times \dfrac{3a(a^6-1)}{2(a^9-1)} + 3a^4$

$$y = \frac{3a^7(a^6-1)}{1-a^9} + \frac{3a^4 - 3a^{13}}{1-a^9}$$
$$y = \frac{3a^4(1-a^3)}{1-a^9}$$

3.2 Coordonnées des points A et B

abscisse de A : on cherche x tel que $\mathrm{T_N}$: $0 = -2a^6x + 3a^4 = \dfrac{3a^4}{2a^6} = \dfrac{3}{2a^2}$

abscisse de B : on cherche x tel que $\mathrm{T_M}$: $0 = \dfrac{-2}{a^3}x + \dfrac{3}{a^2}$

$x = \dfrac{3a^3}{2a^2} = \dfrac{3}{2}a$

3.3 Aire du triangle ABC

$$\mathscr{A} = \frac{\mathrm{AB} \times y_{\mathrm{C}}}{2}$$

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a - \frac{3}{2a^2}\right) \times \frac{3a^4(1-a^3)}{1-a^9}$$

$$\mathscr{A} = \frac{3}{4} \times \frac{a^3-1}{a^2} \times \frac{3a^4(1-a^3)}{1-a^9}$$

$$\mathscr{A} = \frac{9}{4} \times \frac{a^2(1-a^3)^2}{a^9-1}$$

$$\mathscr{A} = \frac{9}{4} \times \frac{a^8-2a^5+a^2}{a^9-1}$$

or on sait que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^8-2a^5+a^2}{a^9-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^8}{a^9} = 0$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathscr{A} = 0$

4. Avec l'aide de Xcas

Les réponses données par Xcas aux calculs n'ont pas exactement la même forme que celles calculées ici « à la main ».

Essayer pour comparer !

remarque : comme on veut un cas général, la figure n'est pas construite… J'ai supposé $a > 1$ car dans le calcul « à la main » on s'aperçoit qu'il y a un problème de simplification. Cette contrainte n'est pas gênante, car on cherche une aire en $+\infty$.

Dans une fenêtre de géométrie :

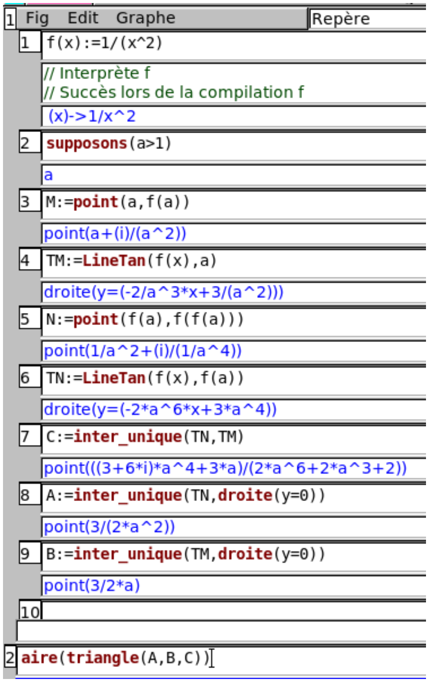
```
f(x):=1/(x^2);
supposons(a>1);
M:=point(a,f(a));
TM:=LineTan(f(x),a);
N:=point(f(a),f(f(a)));
TN:=LineTan(f(x),f(a));
C:=inter_unique(TN,TM);
A:=inter_unique(TN,droite(y=0));
B:=inter_unique(TM,droite(y=0));
```

puis dans une ligne de commandes : pour avoir l'expression de l'aire en fonction de a

```
aire(triangle(A,B,C))
```

ou pour obtenir la limite immédiatement :

```
limit(aire(triangle(A,B,C)),a,+infinity)
```



5. Et si...

Et si on prenait $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, quelle serait l'aire du triangle ABC quand l'abscisse de M tend vers $+\infty$?