correction		**21**
	$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = (9u_n - m)/(u_n + 1)$	
	u_1	
	u_2	
	numérateur $f'(x)$	
CAL	**1. calcul u_1 et u_2**	2
	2. dérivée : formule	2
CAL	dérivée : calculs / signe	2
CHR	**3. majoration : conjecture**	1
SUI01	majoration : recurrence (rédaction)	4
CAL	variations : calculs (f croissante ATT. Intervalle...)	2
CHR	4. variations conjecture	1
SUI01	variations : recurrence (rédaction)	4
CAL	variations : calculs (f croissante...)	2
	5. limite de (u_n)	1

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{9u_n - m}{u_n + 1}$$

et la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{9x - m}{x + 1}$$

avec m le n° de votre mois de naissance.

1. Calcul des premiers termes

$u_1 = \dfrac{9 \times 3 - m}{3 + 1} = \dfrac{27 - m}{4}$

comme $m \in [\![1\,;12]\!]$ on a $u_1 \geqslant \dfrac{15}{4}$ donc pour tous $u_1 > u_0$

pour $u_2 \ldots$

2. Variations de la fonction

On reconnaît une fonction homographique de la forme $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$.

On calcule la dérivée (à l'aide des formules du quotient ou de l'*astuce* vue en cours) :

$$f'(x) = \frac{9 + m}{(x + 1)^2}$$

donc la fonction est croissante sur chaque intervalle sur lequel elle est définie.

- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et on fait attention aux parenthèses et aux signes en développant !!
- dans le cas d'une fonction homographique $f'(x) = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

3. Majoration de la suite

D'après les calculs des premiers termes, il semble que (u_n) est majorée par 8.

Démontrons le par récurrence.

Initialisation : le calcul des premiers termes...

Hypothèse de récurrence : Supposons qu'au rang p, la propriété « $3 < u_p < 8$ » est vraie ;
démontrons qu'au rang $(p + 1)$, la propriété « $3 < u_{p+1} < 8$ » est vraie aussi.

Démonstration : on sait $3 < u_p < 8$ et que la fonction f est croissante sur $[3\,;+\infty[$, donc : $f(3) < f(u_p) < f(8) \Leftrightarrow u_1 < u_{p+1} < 8 - \dfrac{m}{8} \Leftrightarrow 3 < u_{p+1} < 8$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n < 8$

J'ai eu une tolérance pour ceux qui n'ont pas minoré, mais le raisonnement est alors en partie faux...

4. Sens de variations

D'après les calculs des premiers termes, il semble que (u_n) est croissante.

Démontrons le par récurrence.

Initialisation : le calcul des premiers termes...

Hypothèse de récurrence : Supposons qu'au rang p, la propriété « $u_p < u_{p+1}$ » est vraie ;
démontrons qu'au rang $(p+1)$, la propriété « $u_{p+1} < u_{p+1}$ » est vraie aussi.

J'ai eu une tolérance pour ceux qui n'ont pas minoré, mais le raisonnement est alors en partie faux...

Démonstration : on sait $u_p < u_{p+1}$ et que la fonction f est croissante sur $[3;+\infty[$, donc : $f(u_p) < f(u_{p+1}) \Leftrightarrow u_{p+1} < u_{p+2}$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

5. Limite de la suite

Certains l'ont remarqué : ce n'est pas parce que la suite est croissante est majorée par 8 que sa limite est 8.