

# Pré-requis

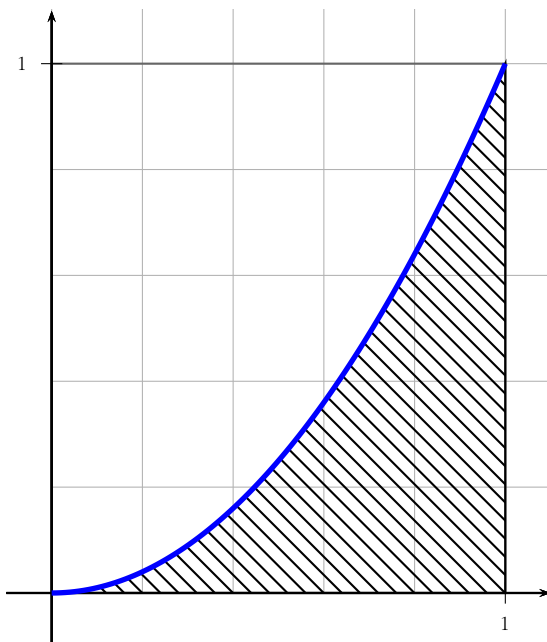
- démonstration par récurrence
- théorème des gendarmes
- trouver la limite d'une fonction rationnelle

<b>correction</b>		<b>21</b>
MOD	figure avec GeoGebra	2
CHR	traces recherche	4
CAL	aire avec Xcas	1
REP	modéliser les aires des rectangles	2
CAL	expression des suites	1
CHR	somme des carrés : conjecture	2
SUIo1	somme des carrés : démonstration	4
REP	encadrement de l'aire + gendarmes	2
SUIo3	limite démontrée	1
COM	démarche compréhensible	2

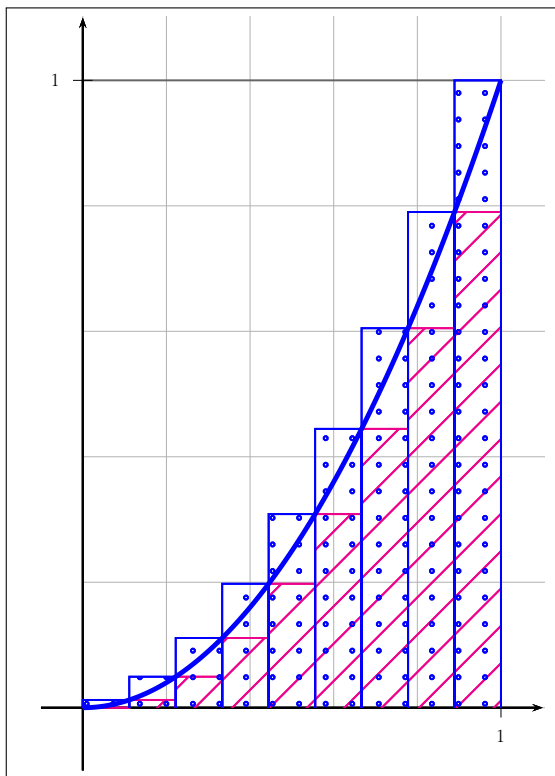
# AIRE SOUS LA PARABOLE

## 1. Aire sous un arc de parabole

Problématique : Trouver l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la droite d'équation  $x = 1$  et la parabole d'équation  $y = x^2$  en expliquant la méthode utilisée et en justifiant le plus possible les résultats obtenus à l'aide de différents logiciels !



## 2. Aides à la recherche



Commandes GeoGebra :

- `SommeSupérieure[Fonction, x min, x max, Nombre Rectangles]`
- `SommeInférieure[Fonction, x min, x max, Nombre Rectangles]`

Commandes Xcas :

- `aire(fonction, x=xmin..xmax)`
- `somme(expression, variable, vmin, vmax)`
- `limit(expression, variable, +infinity)`

### 3. Correction

a) soit  $(u_n)$  la somme des aires des rectangles inférieurs :

tous les rectangles ont une base de  $\frac{1}{n}$ , et les hauteurs sont :  $0; \left(\frac{1}{n}\right)^2; \left(\frac{2}{n}\right)^2; \dots; \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$

donc les aires sont :  $\frac{1}{n} \times 0; \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2; \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2; \dots; \frac{1}{n} \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$

$$\text{d'où } u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Pour trouver la somme des carrés en fonction de  $n$ , on peut

a) utiliser Xcas : `somme(k^2,k,1,n-1)` va donner (éventuellement après simplification)

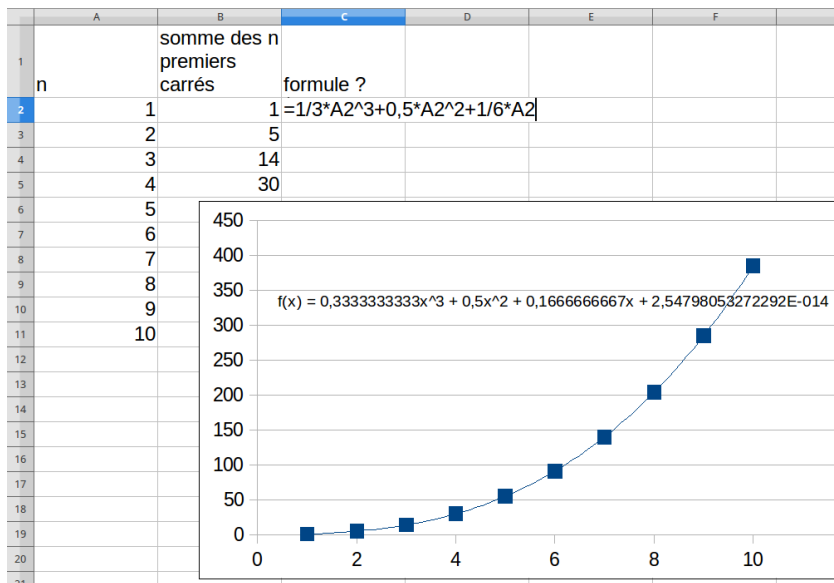
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6}$$

b) utiliser un tableur, faire afficher le *nuage de points* d'abscisse  $n$  et d'ordonnée  $S_n$ , puis chercher une *courbe de tendance*. La forme du nuage incite à essayer une fonction polynôme de degré 2 ou 3.

Une fois les rationnels reconnus, on essaye la formule et on compare les résultats des colonnes « somme des carrés » et « formule ».

Attention aux indices : avec le tableur on a

$$\sum_{k=1}^{\boxed{n}} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$



b) Démontrons par récurrence que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

- initialisation :  $S_1 = 1^2$  et  $\frac{2 \times 1^3 + 3 \times 1^2 + 1}{6} = \frac{2 + 3 + 1}{6} = 1$
- hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier  $p$  tel que l'égalité

$$\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{2p^3 + 3p^2 + p}{6}$$

soit vraie ;

démontrons que cette propriété est vraie au rang  $p + 1$ , c'est à dire :

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1)}{6} = \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}$$

- démonstration :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{p+1} k^2 &= \sum_{k=1}^p k^2 + (p+1)^2 \\
 &= \frac{2p^3 + 3p^2 + p}{6} + (p+1)^2 \\
 &= \frac{2p^3 + 3p^2 + 6(p+1)^2 + p}{6} \\
 &= \frac{2p^3 + 9p^2 + 13p + 6}{6}
 \end{aligned}$$

- conclusion : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

- c) soit  $(v_n)$  la somme des aires des rectangles supérieurs :

tous les rectangles ont une base de  $\frac{1}{n}$ , et les hauteurs sont :  $\left(\frac{1}{n}\right)^2 ; \left(\frac{2}{n}\right)^2 ; \dots ; \left(\frac{n}{n}\right)^2$

donc les aires sont :  $\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 ; \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 ; \dots ; \frac{1}{n} \times \left(\frac{n}{n}\right)^2$

$$\text{d'où } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

- d) D'après la figure (et par construction des suites) :

$$\text{on a } u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n \text{ et } u_n + \frac{1}{n} \times 1 = v_n$$

$$\text{donc } v_n - \frac{1}{n} \leq \mathcal{A} \leq v_n$$

$$\frac{1}{n^3} \times \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{1}{n} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n^3} \times \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

- e) Recherche de la limite en  $+\infty$  de  $v_n = \frac{1}{n^3} \times \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

$$\text{pour } n \neq 0 \text{ on a } v_n = \frac{n^3 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{6n^3} = \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{6}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 2$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

f) en utilisant le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathscr{A} = \frac{1}{3}$$