

correction	45
CHR 1.1 reconnaître forme indéterminée	1,5
FCTo1 méthode expression conjuguée ou ??	1
CAL justesse des calculs	1
FCTo1 limite de f	0,5
CHR 1.2 reconnaître forme indéterminée	1,5
FCTo1 méthode factorisation ou ??	1
CAL justesse des calculs	0,5
FCTo1 limite de f	0,5
FCTo3 1.3 lire limites	1,5
total	9
CHR 2.A.1 identifier période	0,5
FCTo6 méthode $f(x+T)$	0,5
COM calculs justifiés	1
FCTo6 2.A.2 méthode $f(-x)$	0,5
COM calculs justifiés	1
REP Parité / symétrie	0,5
REP 2.A.3 intervalle de travail	0,5
CAL valeurs aux bornes	1
FCTo5 Formule dérivée fct composée	1
FCTo5 Formules dérivée fct puissance	1
FCTo7 Formules dérivée fct trigo	1
COM calculs justifiés	1,5
FCTo6 signe du sinus justifié	1,5
COM tableau de variation complet	1
total A	12,5
REP 2.B.1 représenter suite	1,5
CHR 2.B.2 conjecture variations / limite	1
total B	2,5
total	15
CAL 3.1 Calcul des termes	2
CHR 3.2 calculatrice – conjecture variations	1,5
CHR Calculatrice – conjecture limite	1
ANT 3.3.a calcul dérivée	2
COM signe de la dérivée	2
FCTo1 calcul limite en 0	1,5
FCTo1 calcul limite en $+\infty$	1,5
COM tableau de variation complet	1
CHR 3.3.b minimum	0,5
SUlo1 3.3.c récurrence : initialisation	0,5
SUlo1 écrire hypothèse	1
SUlo1 démonstration	2
SUlo1 conclusion	0,5
CAL 4. calcul différence	1
COM justifier variations	1
SUlo3 5. théorème de convergence	1
CAL 6. valeur de limite	1
total	21

Exercice 1 — Quelques limites

9 points

1. Pour chacune des questions suivantes :

- Calculer la limite demandée en détaillant *raisonnablement* les calculs
- Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{3-\sqrt{x+3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} x - 6 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} 3 - \sqrt{x+3} = 0$$

il s'agit d'une forme indéterminée...

$$\frac{x-6}{3-\sqrt{x+3}} = \frac{(x-6) \times (3+\sqrt{x+3})}{9-(x+3)} = \frac{(x-6) \times (3+\sqrt{x+3})}{-(x-6)} = -(3+\sqrt{x+3})$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{3-\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow 6} -(3+\sqrt{x+3}) = -6$$

La courbe de la fonction admet un « trou » au point d'abscisse 6.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x - 6}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - x - 6 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$$

il s'agit d'une forme indéterminée...

$$\text{on remarque que pour } x \neq 0, f(x) = \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right)}{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right)}{1 - \frac{2}{x}}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} = 2$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2 - \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{x} = 1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

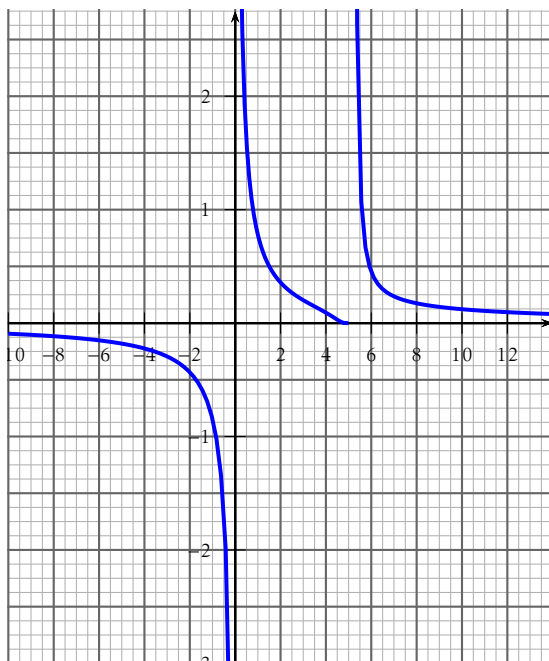
2. Compléter les limites à l'aide d'une lecture graphique. La courbe représente une fonction f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$$

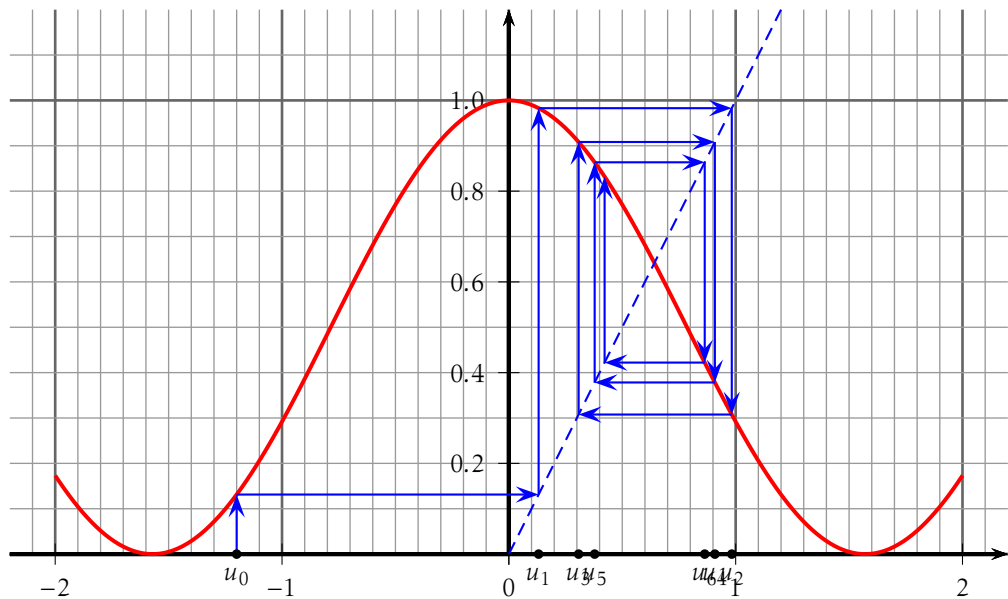


Exercice 2 — Suites et fonctions trigonométriques 15 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) + \sin^2(x)$$

Le graphique représente la fonction f sur l'intervalle $[-2; 2]$



Partie A – Étude de la fonction

1. Vérifier si f est périodique. Si elle l'est, préciser sa période.

la représentation graphique permet de penser que la fonction est π -périodique.

si $x \in \mathbb{R}$ alors $(x + \pi) \in \mathbb{R}$.

$$f(x + \pi) = \cos(2(x + \pi)) + \sin^2(x + \pi)$$

$$= \cos(2x + 2\pi) + \sin^2(x + \pi)$$

$$\text{or } \sin(x + \pi) = -\sin(x), \text{ donc } \sin^2(x + \pi) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x).$$

d'où $f(x + \pi) = f(x)$. La fonction f est π -périodique.

2. Vérifier l'éventuelle parité de f et les conséquences sur son graphe.

si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \cos(-2x) + \sin^2(-x)$$

$$\text{or } \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \text{ et } \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\text{donc } f(-x) = \cos(2x) + (-\sin(x))^2 = \cos(2x) + \sin^2(x) = f(x)$$

donc f est une fonction paire. Son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. Vérifier que $f'(x) = -\sin(2x)$, en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle de travail défini à l'aide des questions précédentes.

f étant paire et π -périodique, on peut restreindre l'intervalle de travail à $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Valeurs aux bornes — $f(0) = \cos(2 \times 0) + \sin^2(0) = 1 + 0 = 1$

$$f(\frac{\pi}{2}) = \cos(2 \times \frac{\pi}{2}) + \sin^2(\frac{\pi}{2}) = -1 + 1 = 0$$

Dérivée de f — la dérivée de $x \mapsto \cos(2x)$ est $x \mapsto -2\sin(2x)$

la dérivée de $x \mapsto \sin^2(x)$ est $x \mapsto 2\cos(x)\sin(x)$

$$\text{donc } f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(x)\sin(x).$$

$$\text{Or } \sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\text{donc } f'(x) = -2\sin(2x) + \sin(2x) = -\sin(2x)$$

Signe de la dérivée — $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ donc $(2x) \in [0; \pi]$ donc $\sin(2x) \geq 0$, d'où $f'(x) \leq 0$.

Tableau de variations —

x	0	$\frac{\pi}{2}$
signe de $f'(x)$	0	— 0
variations de f	1	0



Partie B – Suite associée

Soit (u_n) la suite définie par u_0 (voir tableau)
et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(2u_n) + \sin^2(u_n)$

mois de naissance	janv. - févr. - mars	avr. - mai - juin	juil.- août - sept	oct. - nov. - dec.
u_0	-1,2	-1	-0,2	0,2

- Représenter sur le graphique les 7 premiers termes de la suite.
- Émettre des conjectures au sujet des variations et de la limite de la suite.

Il semble qu'à partir de $n = 2$, la suite des termes de rang pair est croissante et que celle des termes de rang impairs est décroissante.

Il semble que la suite converge vers 0,65

Exercice 3 — Suite

21 points

La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{u_n}$$

remarque : il est évident, par définition de la suite, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

1. Calculer la valeur exacte, puis approchée, de u_1 , u_2 et u_3 .

$$\begin{array}{l|l|l} u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{5}{u_0} & u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{5}{u_1} & u_3 = \frac{1}{2}u_2 + \frac{5}{u_2} \\ u_1 = \frac{5}{2} + \frac{5}{5} & u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} + 5 \times \frac{2}{7} & u_3 = \frac{1}{2} \times \frac{89}{28} + 5 \times \frac{28}{89} \\ u_1 = \frac{7}{2} = 3,5 & u_2 = \frac{89}{28} \approx 3,18 & u_3 = \frac{15761}{4984} \approx 3,16 \end{array}$$

2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n) .
On a l'impression que la suite est décroissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3,162\,277\,66$
3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{x}$.

- a) Déterminer le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$. (Ne pas oublier le calcul des limites aux bornes de l'intervalle.)

Dérivée de f

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{x^2} = \frac{x^2 - 10}{2x^2}$$

Le signe de f est donc celui de $(x^2 - 10)$ (polynôme du second degré qui a pour racines $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$ et qui est positif à l'extérieur des racines).

Donc $f(x) \leq 0$ sur $]0; \sqrt{10}]$ et $f(x) \geq 0$ sur $[\sqrt{10}; +\infty[$.

Limites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{2}x = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{5}{x} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Tableau de variations

x	0	$\sqrt{10}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	+
variations de f	$+\infty$	$\searrow$ $\sqrt{10}$	$\nearrow$ $+\infty$

- b) En déduire que f admet un minimum m et donner la valeur de m .

f est continue, par lecture du tableau de variations elle atteint un minimum $m = \sqrt{10}$.

- c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la propriété : « Pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{10}$ » est vraie.

Initialisation – $u_0 = 5 \geq \sqrt{10}$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité – Supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $u_p \geq \sqrt{10}$ » est vraie ; démontrons alors que la propriété est vraie au rang $p + 1$, c'est à dire « $u_{p+1} \geq \sqrt{10}$ » est vraie.

Démonstration – On sait par hypothèse de récurrence que $u_p \geq \sqrt{10}$ or sur $[\sqrt{10}; +\infty[$ la fonction f est croissante

donc $f(u_p) \geq f(\sqrt{10})$
c'est à dire $u_{p+1} \geq \sqrt{10}$.

Conclusion – Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq \sqrt{10}$.

4. Calculer $u_{n+1} - u_n$, en déduire le sens de variation de (u_n) .

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}u_n + \frac{5}{u_n} - u_n \\ &= \frac{5}{u_n} - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{10 - u_n^2}{2u_n} \end{aligned}$$

Or on sait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{10}$, donc $10 - u_n^2 \leq 0$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

la suite (u_n) est donc décroissante.

5. Que dire du comportement à l'infini de la suite (u_n) ?

(u_n) est une suite décroissante et minorée, donc elle converge.

6. Rappels :

- Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique.
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors ℓ vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$.

Déduire des questions précédentes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On sait que (u_n) converge vers une limite ℓ .

Donc $\ell = f(\ell)$, d'après l'étude de la fonction f , $\ell = \sqrt{10}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{10}$.