BAC BLANC – MATHÉMATIQUES – Section S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Sujet A (spécialité maths)

Une calculatrice par candidat autorisée.

Toute trace de recherche sera prise en compte pour l'évaluation.

Ce sujet est inspiré de Nouvelle Calédonie, mars 2016

Exercice 1

7 points

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A –

Une boite contient 200 pièces de monnaies de collection dont 50 sont en argent, les autres en or.

Parmi les pièces d'argent, 60 % ont une valeur de 10 €, 30 % ont une valeur de 50 €, les autres ont une valeur de 20 €.

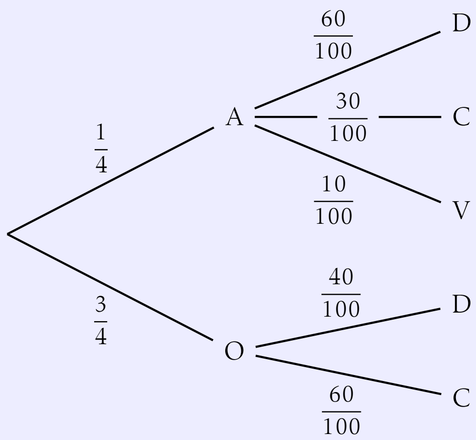
Parmi les pièces en or, 40 % ont une valeur de 10 €, les autres ont une valeur de 50 €.

On tire au hasard une pièce de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

- A l'événement « la pièce tirée est en argent » ;
- O l'événement « la pièce tirée est en or » ;
- D l'événement « la pièce tirée a une valeur de 10 € » ;
- C l'événement « la pièce tirée a une valeur de 50 € » ;
- V l'événement « la pièce tirée a une valeur de 20 € ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

a) Calculer la probabilité que la pièce tirée soit argentée et soit d'une valeur de 50 €.



L'événement « la pièce tirée est argentée et a une valeur de 50 € » est $A \cap C$.

$P(A \cap C) = P(A) \times P_A(C) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{30}{100} = \dfrac{3}{40}$

b) Montrer que la probabilité que la pièce tirée représente soit d'une valeur de 50 € est égale à $\dfrac{21}{40}$.

On cherche $P(C)$; d'après la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(A \cap C) + P(O \cap C)$

$= P(A) \times P_A(C) + P(O) \times P_O(C)$

$= \dfrac{3}{40} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{60}{100} = \dfrac{21}{40}$

c) Sachant que la pièce tirée est d'une valeur de 50 €, quelle est la probabilité que celle-ci soit en or ?

On cherche $P_C(O) = \dfrac{P(O \cap C)}{P(C)} = \dfrac{\dfrac{3}{4} \times \dfrac{6}{10}}{\dfrac{21}{40}} = \dfrac{6}{7}$

2. Sachant que la pièce tirée est d'une valeur de 20 €, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Il n'y a pas de pièce dorée d'une valeur de 20 €, donc la probabilité que la pièce tirée soit argentée sachant qu'elle est d'une valeur de 20 € est de 1.

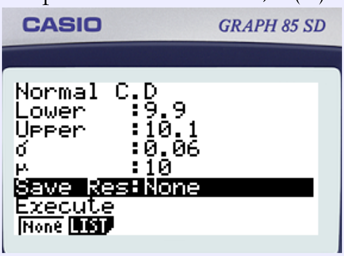
Partie B –

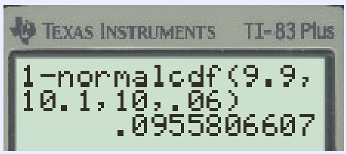
Une pièce est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.

On dispose de deux machines M et N pour produire les pièces.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M produit des pièces dont la masse G en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.
   On note B l'événement « la pièce est conforme ».
   Calculer la probabilité qu'une pièce produite par la machine M ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

La probabilité qu'une pièce soit conforme est $P(B) = P(9{,}9 \leqslant G \leqslant 10{,}1)$ donc la probabilité qu'une pièce soit non conforme est $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.
D'après la calculatrice, $P(B) = P(9{,}9 \leqslant G \leqslant 10{,}1) \approx 0{,}904$. Donc $P(\overline{B}) \approx 0{,}096$.





2. La proportion des pièces non conformes produites par la machine M étant jugée trop importante, on utilise une machine N qui produit des pièces dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.
   a) Soit Y la variable aléatoire égale à $\dfrac{X - 10}{\sigma}$.
   Quelle est la loi suivie par la variable Y ?

D'après le cours, on peut dire que la variable Y suit la loi normale centrée réduite.

b) Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

Réponse à « l'ancienne »

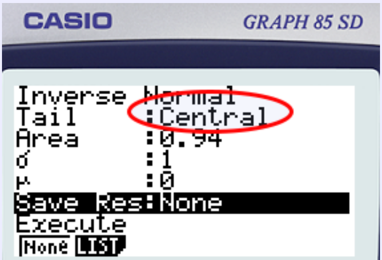
Cette machine produit 6 % de pièces non conformes, ce qui veut dire que $P(\overline{B}) = 0{,}06$; donc $P(B) = 0{,}94$.

$P(9{,}9 \leqslant X \leqslant 10{,}1) = 0{,}94$

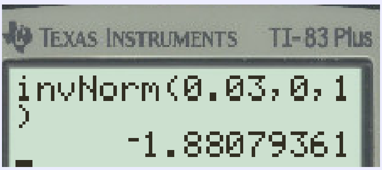
$\Leftrightarrow P\left(\dfrac{9{,}9-10}{\sigma} \leqslant \dfrac{X-10}{\sigma} \leqslant \dfrac{10{,}1-10}{\sigma}\right) = 0{,}94$

$\Leftrightarrow P\left(\dfrac{-0{,}1}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \dfrac{0{,}1}{\sigma}\right) = 0{,}94$

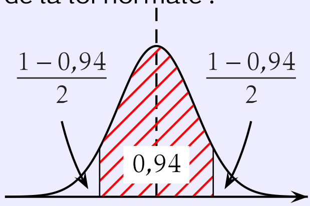
Casio : menu Stats → menu Dist → menu Norm → touche InvN puis



Ti : touche Distr → fonction InverNorm



Attention, avec la Ti, il faut penser aux propriétés de symétrie de la loi normale :



Donc $\dfrac{-0{,}1}{\sigma} = -1{,}8808$, d'où $\sigma \approx 0{,}053$

Réponse à la « je connais ma calculatrice »

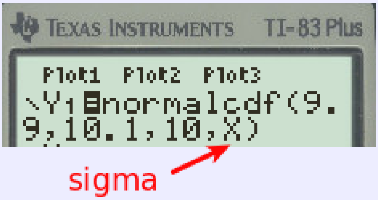
Avec la calculatrice, on peut aussi travailler sur la fonction :

Ti $\sigma \mapsto$ normalcdf (binf, bsup,μ, σ)

Casio $\sigma \mapsto$ normalcdf (binf, bsup,σ, μ)

et chercher dans le tableau de valeurs l'antécédent de 0,94 (jouer sur le pas de calcul).

Copies d'écran Ti, mais faisable avec Casio



Conclusion : Pour que la machine N produise 6 % de pièces non conformes, il faut que $\sigma \approx 0{,}053$.

Exercice 2

3 points

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0~;~16]$ par

$$g(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad f(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$$

Dans un repère du plan $\left(\text{O}~;\vec{\imath};\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ les courbes représentatives des fonctions g et f.

Ces courbes sont données en **annexe** 1.

Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

Remarque : le sujet ne précisait pas « Comparer les aires hachurées *par le calcul* » ; mais pour utiliser la calculatrice il faut connaître les valeurs exactes des bornes d'intégration (par lecture graphique on *suppose* 0 ; 2π et 4π et il faut d'assurer que les aires correspondent bien à un calcul d'intégrale, c'est à dire que $\ln(x+1)+1-\cos(x) \geqslant \ln(1+x)$.

Une réponse purement « machine » n'est donc pas satisfaisante !

Vérifions que, comme le laisse supposer le graphique,
pour $x \in [0\,;16]$ on a $\ln(x+1)+1-\cos(x) \geqslant \ln(1+x)$

On sait que pour tout $x \in [0\,;16]$
$-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
$\Leftrightarrow -1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant 1-\cos x \leqslant 2$
$\Leftrightarrow \ln(x+1) \leqslant \ln(x+1)+1-\cos x$

Les points A et B sont les points d'intersection de $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$.

on cherche $x \in [0\,;16]$ tel que $\ln(x+1)+1-\cos x = \ln(1+x)$
$\Leftrightarrow 1-\cos x = 0$
$\Leftrightarrow \cos x = 1$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$ ou $x = 4\pi$

Il s'agit donc de comparer les aires des domaines définis par :
$\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(x+1)+1-\cos(x)-\ln(x+1)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} 1-\cos(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_{2\pi}^{4\pi} 1-\cos(x)\,\mathrm{d}x$

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} 1-\cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x-\sin x\Big]_0^{2\pi} = 2\pi-\sin(2\pi)-(0-\sin(0)) = 2\pi$$

$$\mathrm{J} = \int_{2\pi}^{4\pi} 1-\cos(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x-\sin x\Big]_{2\pi}^{4\pi} = 4\pi-\sin(4\pi)-(2\pi-\sin(2\pi)) = 2\pi$$

Les aires sont donc égales.

Exercice 3

6 points

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère pour tout réel m, le plan P_m d'équation

$$\frac{1}{4}m^2x+(m-1)y+\frac{1}{2}mz-3=0$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point I$(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ appartient-il au plan P_m ?

Les coordonnées de A doivent vérifier l'équation du plan P_m,
donc $\frac{1}{4}m^2\times 1+(m-1)\times 1+\frac{1}{2}m\times 1-3=0$
$\frac{1}{4}m^2+\frac{3}{2}m-4=0$

on remarque que $m=2$ est une racine évidente,
donc l'autre racine est $\dfrac{-4}{2\times\frac{1}{4}}=-8$

Donc $A\in P_2$ et $A\in P_{-8}$.

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique

$$(d)\left\{\begin{array}{l} x=12-2t \\ y=9-2t \\ z=t \end{array}\right. \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

P_1 a pour équation : $\frac{1}{4}\times 1^2\times x+(1-1)y+\frac{1}{2}\times 1\times z-3=0$
$\Leftrightarrow x+2z-12=0$
On vérifie que $(d)\subset P_1$, quelque soit $t\in\mathbb{R}$ on a
$(12-2t)+2t-12=0$ donc $(d)\subset P_1$

P_{-4} a pour équation : $\frac{1}{4}\times -4^2\times x+(-4-1)y+\frac{1}{2}\times(-4)\times z-3=0$
$\Leftrightarrow 4x-5y-2z-3=0$
On vérifie que $(d)\subset P_{-4}$, quelque soit $t\in\mathbb{R}$ on a
$4(12-2t)-5(9-2t)t-2(t)-3$
$48-45-3-8t+10t-2t=0$ donc $(d)\subset P_{-4}$

3. a) Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté J dont on déterminera les coordonnées.

équation de P_0 : $\frac{1}{4}\times 0^2\times x+(0-1)y+\frac{1}{2}\times 0\times z-3=0$
$\Leftrightarrow y+3=0$
On cherche $J\in(d)$ tel que les coordonnées de J vérifient l'équation de P_0.
$(9-2t)+3=0\Leftrightarrow t=6$
les coordonnées du point J sont $(0\,;-3\ 6)$

b) Justifier que pour tout réel m, le point J appartient au plan P_m.

On remplace les coordonnées de J dans l'équation de P_m :
$\frac{1}{4}m^2 \times 0 + (m-1) \times (-3) + \frac{1}{2}m \times 6 - 3$
$= -3m + 3 + 3m - 3 = 0$
Donc quelque soit m, le point J appartient au plan P_m.

c) Montrer que le point J est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m.

Supposons qu'il existe un point K, différent du point J qui appartient à tous les plans P_m, alors K appartient en particulier à P_1 et P_{-4}, donc il appartient à (d).
Il faut aussi que K appartienne à P_0, or les plans P_1, P_0 et P_{-4} un unique point d'intersection : J.
Donc K = J.

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que

$$-10 \leqslant m \leqslant 10 \quad \text{et} \quad -10 \leqslant m' \leqslant 10.$$

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

a) Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

deux plans sont perpendiculaires si deux représentants de leurs vecteurs normaux le sont.
on sait que $P_1 : x + 2z - 12 = 0$, donc un vecteur normal est $\overrightarrow{u}_1(1\,;0\,;2)$
on sait que $P_{-4} : 4x - 5y - 2z - 3 = 0$, donc un vecteur normal est $\overrightarrow{u}_{-4}(4\,;-5\,;-2)$
on a $\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{u}_{-4} = 1 \times 4 + 0 \times (-5) + 2 \times (-2) = 0$
donc P_1 et P_{-4} sont orthogonaux.

b) Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si

$$\left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0$$

le plan P_m a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}_m = \left(\frac{1}{4}m^2\,;m-1\,;\frac{1}{2}m\right)$ et le plan $P_{m'}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}_{m'} = \left(\frac{1}{4}m'^2\,;m'-1\,;\frac{1}{2}m'\right)$
Les plans sont orthogonaux si et seulement si
$\overrightarrow{u}_m \cdot \overrightarrow{u}_{m'} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}m^2 \times \frac{1}{4}m'^2 + (m-1)\times(m'-1) + \frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}m' = 0$
$\Leftrightarrow \left(\frac{mm'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{mm'}{4} = 0$

c) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	m et m' entiers relatifs
Traitement :	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $(mm')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4mm' = 0$
	Alors Afficher $(m\ ;\ m')$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

Cet algorithme cherche tous les couples d'entiers relatifs $(m;m')$, avec m et m' compris entre -10 et 10, tels que les plans P_m et $P_{m'}$ soient orthogonaux.

d) Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4;1)$, $(0;1)$ et $(5;-4)$.
Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

on obtient dans l'ordre les couples $(m;m')$: $(-4;1)$, $(-4;5)$,$(0;1)$, $(1;-4)$, $(1;0)$, $(5;-4)$

Exercice 4

5 points

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A –

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine.

Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y (c'est elle qui code la lettre d'origine).

Exemple : M correspond à $x = 12$
$7 \times 12 + 5 = 89$
Or $89 \equiv 11\ [26]$ et 11 correspond à la lettre L,
donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.

L correspond à $x = 11$
$7 \times 11 + 5 = 82$
Or $82 \equiv 4\ [26]$ et 4 correspond à la lettre E,
donc la lettre L est codée par la lettre E.

2. a) Soit k un entier relatif. Montrer que si $k \equiv 7x\ [26]$ alors $15k \equiv x\ [26]$.

$k \equiv 7x\ [26]$
$\Rightarrow 15k \equiv 15 \times 7x\ [26]$
$\Rightarrow 15k \equiv 105x\ [26]$
$\Rightarrow 15k \equiv (4 \times 26 + 1)x\ [26]$
$\Rightarrow 15k \equiv x\ [26]$

b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

Soit $k \in \mathbb{Z}$, $15k \equiv x\ [26]$
$\Rightarrow 7 \times 15k \equiv 7x\ [26]$
$\Rightarrow 105k \equiv 7x\ [26]$
$\Rightarrow (26 \times 4 + 1)k \equiv 7x\ [26]$
$\Rightarrow k \equiv 7x\ [26]$
Donc $15k \equiv x\ [26] \Leftrightarrow k \equiv 7x\ [26]$

c) En déduire que $y \equiv 7x+5\ [26]$ équivaut à $x \equiv 15y+3\ [26]$.

$y \equiv 7x+5\ [26]$	$\Leftrightarrow 15y-75 \equiv x\ [26]$
$\Leftrightarrow y-5 \equiv 7x\ [26]$	$\Leftrightarrow 15y-3\times 26+3 \equiv x\ [26]$
$\Leftrightarrow 15(y-5) \equiv x\ [26]$	$\Leftrightarrow 15y+3 \equiv x\ [26]$

3. À l'aide de la question précédente décoder la lettre F.

F correspond à $y=5$; on a donc $15\times 5+3 \equiv x\ [26] \Leftrightarrow 0 \equiv x\ [26]$, donc la lettre d'origine est A.

Partie B –

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=7a_n+5$ et $b_{n+1}=15b_n+3$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n=\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^n-\dfrac{5}{6}$.

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n,

$b_n=\left(b_0+\dfrac{3}{14}\right)\times 15^n-\dfrac{3}{14}$.

Démonstration par récurrence que la propriété P « pour tout entier naturel n, $a_n=\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^n-\dfrac{5}{6}$ » est vraie.

Initialisation : pour $n=0$, $\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^0-\dfrac{5}{6}=a_0+\dfrac{5}{6}-\dfrac{5}{6}=a_0$

La propriété P est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $a_p=\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^p-\dfrac{5}{6}$ » est vraie, montrons qu'alors qu' au rang $(p+1)$; la propriété « $a_{p+1}=\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^{p+1}-\dfrac{5}{6}$ » est vraie.

Démonstration : $a_{p+1}=7a_p+5$ par définition de la suite

$\Leftrightarrow 7\times\left(\left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^p-\dfrac{5}{6}\right)+5$ par hypothèse de récurrence

$\Leftrightarrow \left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^{p+1}-\dfrac{35}{6}+\dfrac{30}{6} \Leftrightarrow \left(a_0+\dfrac{5}{6}\right)\times 7^{p+1}-\dfrac{5}{6}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \left(a_0 + \dfrac{5}{6}\right) \times 7^n - \dfrac{5}{6}$

Partie C –

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé $2-2-5-6$, on applique « 2 » fois le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 » fois le chiffrement à la lettre A, « 5 » fois le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 » fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé $2-2-5-6$.

Décoder la lettre R dans le mot ZPJR.

On cherche une lettre qui codée 6 fois de suite donne la lettre R. Donc il suffit de décoder 6 fois de suite la lettre R pour obtenir la lettre initiale.

lettre	y	$15y+3$	$\equiv x\ [26]$
R	17	258	24
	24	363	25
	25	378	14
	14	213	5
	5	78	0
	0	3	3

Donc la lettre initiale correspond à $x = 3$, c'est D.

ANNEXE 1 de l'exercice 2