BAC BLANC – MATHÉMATIQUES – Section S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Sujet B (non spé maths)

Une calculatrice par candidat autorisée.

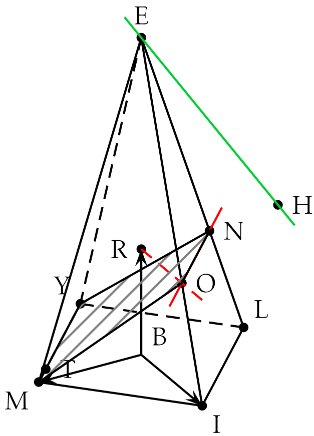
Toute trace de recherche sera prise en compte pour l'évaluation.

Ce sujet est inspiré de Amérique du Nord, juin 2015

Exercice 1

5 points

Dans l'espace, on considère une pyramide EMILY à base carrée MILY de centre B. Soit R le point de l'espace tel que $\left(B ; \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BR}\right)$ soit un repère orthonormé. Le point E a pour coordonnées (0 ; 0 ; 3) dans ce repère.



Partie A –

1. Soit O le point de la droite (EI) de cote 1. Construire le point O sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.

on construit la parallèle à (BI) passant par R.

2. Soit N le point d'intersection du plan (MYO) et de la droite (EL). Montrer que les droites (ON) et (IL) sont parallèles. Construire le point N sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.

N ∈ (MYO), donc (ON) est incluse dans le plan (MYO).
N ∈ (EL), et O ∈ (EI) donc (ON) est incluse dans (EIL).
les plans (YMO) et (EIL) sont donc sécants en (ON), de plus (MY) est parallèle à (IL), donc d'après le théorème du toit : (ON) est parallèle à (IL).

3. Soit T le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\,;-\frac{1}{6}\ 0\right)$.
Montrer que T est le pied de la hauteur issue de O dans le trapèze MONY.

Montrons que T appartient à (MY) et que (TO) est perpendiculaire à (MY).
« T appartient à (MY) » est équivalent à « les vecteurs $\overrightarrow{MT}$ est $\overrightarrow{MY}$ sont colinéaires ».
On lit les coordonnées de $M(1\,;0\,;0)$ et celles de $Y(0\,;-1\,;0)$ donc $\overrightarrow{MY}\,(-1\,;-1\,;0)$.
on calcule $\overrightarrow{MT}\left(\frac{5}{6}-1\,;-\frac{1}{6}\,;0\right)=\left(\frac{-1}{6}\,;\frac{1}{6}\,;0\right)$.
Donc $\overrightarrow{MT}=\frac{1}{6}\overrightarrow{MY}$, donc $T \in [MY]$.

si « $\overrightarrow{TO}\cdot\overrightarrow{MY}=0$ » alors « (TO) est perpendiculaire à (MY) »
D'après le théorème de Thalès dans le triangle BIE, $O\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$, donc
$\overrightarrow{TO}\left(-\frac{5}{6}\,;\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\,;1-0\right)=\left(-\frac{5}{6}\,;\frac{-5}{6}\,;0\right)$.
donc $\overrightarrow{TO}\cdot\overrightarrow{MY}=\frac{-5}{6}\times(-1)+\frac{5}{6}\times(-1)+1\times 0=0$,

Le point T est bien le pied de la hauteur issue de O dans le trapèze MONY.

Partie B –

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère MONY est $\dfrac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point O a pour coordonnées $\left(0\,;\dfrac{2}{3}\,;1\right)$.

Vérifier que le plan (YMO) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.

Il est évident que les points Y, M et O ne sont pas alignés, donc ils définissent un plan.
Soit $(\mathscr{P})$ le plan d'équation $3x-3y+5z-3=0$.
On a $3\times 0-3\times\dfrac{2}{3}+5\times 1-3=0$, donc $O\in(\mathscr{P})$;
On a $3\times 1-3\times 0+5\times 0-3=0$, donc $M\in(\mathscr{P})$;
On a $3\times 0-3\times(-1)+5\times 0-3=0$, donc $Y\in(\mathscr{P})$;
donc le plan $(\mathscr{P})$ est le plan (YMO).

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (YMO) passant par le point E.

Un vecteur directeur de (d) est un vecteur normal du plan (YMO), donc une équation paramétrique de (d) est :

$$\begin{cases} x=x_E+3\lambda \\ y=y_E-3\lambda \qquad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R} \\ z=z_E+5\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\lambda \\ y=-3\lambda \qquad \text{avec } \lambda\in\mathbb{R} \\ z=3+5\lambda \end{cases}$$

3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (YMO).

On cherche un point dont les coordonnées vérifient les équations de (d) et de (YMO) :
$3\times 3\lambda-3\times(-3\lambda)+5\times(3+5\lambda)-3=0$
$\lambda=-\dfrac{12}{43}$
donc $H\left(\dfrac{-36}{43}\,;\dfrac{36}{43}\,;\dfrac{69}{43}\right)$

4. Le plan (YMO) partage la pyramide EMILY en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

Si ces solides ont le même volume, ce doit être la moitié du volume de la pyramide EMILY.
Or le volume de EMILY est $\frac{1}{3} \times \sqrt{2}^2 \times 3 = 2$ (avec $MI = \sqrt{2}$ et la hauteur $BE = 3$)
La pyramide HMONY a pour base MONY et pour hauteur EH, donc son volume est : $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times EH$.
Or $EH = \sqrt{\left(\frac{-36}{43} - 0\right)^2 + \left(\frac{36}{43} - 0\right)^2 + \left(\frac{69}{43} - 3\right)^2} = \frac{12}{\sqrt{43}}$
Donc $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times \frac{10}{\sqrt{43}} = \frac{10}{9} \neq \frac{1}{2}\mathscr{V}_{\text{EMILY}}$
Donc (YMO) ne partage pas la pyramide EMILY en deux solides de même volume.

Exercice 2

5 points

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (P_n) par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} x_{n+1} = 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} = 0,6x_n + 0,8y_n \end{cases}$$

1. a) Déterminer les coordonnées des points P_0, P_1 et P_2.

$P_0 = (-3\,;4)$
$x_1 = 0{,}8x_0 - 0{,}6y_0 = -4{,}8$
$y_1 = 0{,}6x_0 + 0{,}8y_0 = 1{,}4$
donc $P_1(-4{,}8\,;1{,}4)$

$x_2 = 0{,}8x_1 - 0{,}6y_1 = -4{,}68$
$y_2 = 0{,}6x_1 + 0{,}8y_1 = -1{,}76$
donc $P_2(-4{,}68\,;-1{,}76)$

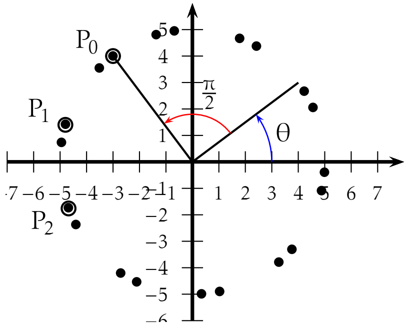
b) Pour construire les points P_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme ci-dessous :
Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points P_0 à P_{20}.

c) À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points ci-dessous :
Identifier les points P_0, P_1 et P_2. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points P_n pour tout n entier naturel ?

Les points P_n semblent appartenir au cercle de O et de rayon 5

Variables :
k, x, y, t : nombres réels
Initialisation :
x prend la valeur -3
y prend la valeur 4
Traitement :
Pour k allant de 0 à 20
Construire le point de coordonnées $(x\ ;\ y)$
t prend la valeur x
x prend la valeur $0{,}8x - 0{,}6y$
y prend la valeur $0{,}6\boxed{t} + 0{,}8y$
Fin Pour



2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points P_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point P_n.

a) Soit $r_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $r_n = 5$.

Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

Démontrons cette propriété par récurrence.

initialisation : $r_0 = |z_0| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $r_p = \left|z_p\right| = 5$ »

montrons que pour l'entier $p+1$ la propriété reste vraie.

Démonstration : $\left|z_{p+1}\right|^2 = \left|x_{n+1} + iy_{n+1}\right|^2$

$= (0{,}8x_n - 0{,}6y_n)^2 + (0{,}6x_n + 0{,}8y_n)^2$

$= (0{,}64 + 0{,}36)x_n^2 + (0{,}36 + 0{,}64)y_n^2 - 2 \times 0{,}640{,}36x_ny_n + 2 \times 0{,}640{,}36x_ny_n$

$= x_n^2 + y_n^2 = |z_n| = 5$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|z_n| = 5$

b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0{,}8$ et $\sin(\theta) = 0{,}6$.
Montrer que, pour tout entier naturel n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

on sait que $z_n = x_n + iy_n$, donc $e^{i\theta} z_n = (\cos\theta + i\sin\theta)(x_n + iy_n)$
$= (\cos\theta x_n - \sin\theta y_n) + i(\sin\theta x_n + \cos\theta) y_n$
$= (0{,}8x_n - 0{,}6y_n) + i(0{,}6x_n + 0{,}8y_n)$
$= x_{n+1} + iy_{n+1} = z_{n+1}$

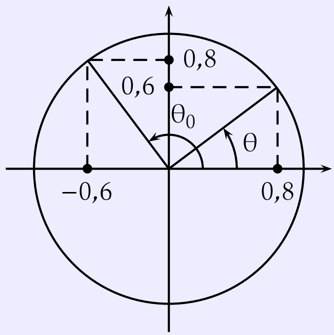
c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

Démontrons cette propriété par récurrence.
initialisation : $e^{i\times 0\times\theta} = 1$, donc on a bien $z_0 = e^{in\theta} z_0$
Hérédité : supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $z_p = e^{ip\theta} z_0$ »
montrons que pour l'entier $p+1$ la propriété reste vraie.
Démonstration : On sait que $z_{p+1} = e^{i\theta} z_p \Leftrightarrow z_{p+1} = e^{i\theta} \times e^{ip\theta} z_0 \Leftrightarrow z_{p+1} = e^{i(p+1)\theta} z_0$
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n = e^{in\theta} z_0$

d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

$z_0 = -3 + 4i$, en posant $\theta_0 = \arg z_0$ on sait que $\cos\theta_0 = \dfrac{-3}{5} = -0{,}6$ et $\sin\theta_0 = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

on a donc : $\cos\theta_0 = -\sin\theta$ et $\sin\theta_0 = \cos\theta$, donc $\theta_0 = \theta + \dfrac{\pi}{2}$



e) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point P_{n+1} à partir du point P_n.

on sait que $z_n = e^{in\theta} z_0$, donc $\arg z_n = n \times \theta + \theta_0 = (n+1)\theta + \dfrac{\pi}{2}$
P_{n+1} est l'image de P_n par la rotation de centre O et d'angle θ : il suffit de reporter l'angle θ.

Exercice 3

4 points

Une entreprise fabrique des steaks hachés de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Dans cet exercice les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie A – Contrôle avant la mise sur le marché

Un steak haché doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Il est donc mis sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.

La masse (exprimée en grammes) d'un steak haché peut être modélisée par une variable aléatoire M suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'événement S : « le steak est mis sur le marché ».

   Le steak est mis sur le marché si $(98 \leqslant M \leqslant 102)$, à l'aide de la calculatrice : $P(98 \leqslant M \leqslant 102) \approx 0{,}954$

2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.
   Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « le steak est mis sur le marché » soit égale à 0,97.

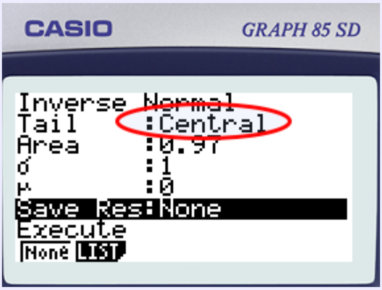
   On veut modifier la valeur de σ, pour cela il faut d'abord « centrer-réduire » la variable aléatoire M.
   On sait que $Z = \dfrac{M - 100}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

On veut $P(98 \leqslant M \leqslant 102) = 0{,}97$
$\Leftrightarrow P(\frac{98-100}{\sigma} \leqslant \frac{M-100}{\sigma} \leqslant \frac{102-100}{\sigma}) = 0{,}97$
$\Leftrightarrow P(\frac{-2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{2}{\sigma}) = 0{,}97$

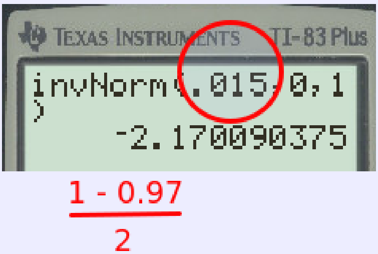
À l'aide de la calculatrice :

À l'aide de la calculatrice on cherche x_1 et x_2 tels que pour une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ on ait $P(x_1 \leqslant Z \leqslant x_2) = 0{,}97$

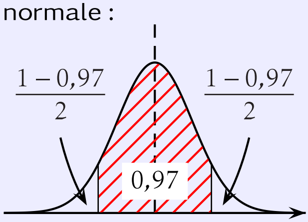
Casio : menu Stats → menu Dist → menu Norm → touche InvN puis



Ti : touche Distr → fonction InverNorm



Attention, avec la Ti, il faut penser aux propriétés de symétrie de la loi normale :



on trouve $x_1 \approx -2{,}17$ et $x_2 \approx 2{,}17$
$-\frac{2}{\sigma} \approx -2{,}17 \Leftrightarrow \sigma \approx 0{,}921.$

Réponse à la « je connais ma calculatrice »

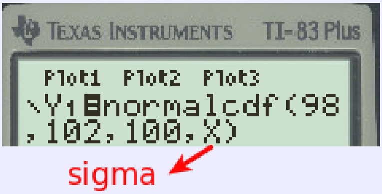
Avec la calculatrice, on peut aussi travailler sur la fonction :

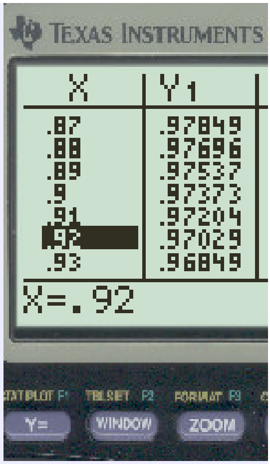
Ti $\sigma \mapsto$ normalcdf (binf, bsup,μ, σ)

Casio $\sigma \mapsto$ normalcdf (binf, bsup,σ, μ)

et chercher dans le tableau de valeurs l'antécédent de $0{,}97$ (jouer sur le pas de calcul).

Copies d'écran Ti, mais faisable avec Casio





Conclusion : pour que le steak soit mis sur le marché, il faut que σ soit égal à 0,921 (à 10^{-3} près).

Partie B – Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité de la viande livrée par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux de matière grasse qui doit être de 7 %. On dit alors que la viande est conforme.

L'entreprise a trois fournisseurs différents :

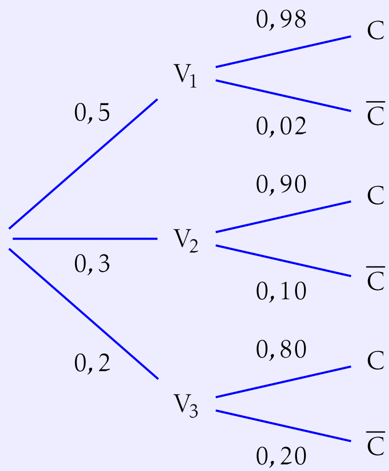
le premier fournisseur procure la moitié du stock de viande, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux de matière grasse ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de viande non conforme.

On choisit au hasard une tranche de viande dans le stock reçu. On note V_i l'événement « la tranche de viande provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « la tranche de viande est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la tranche de viande provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme. Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

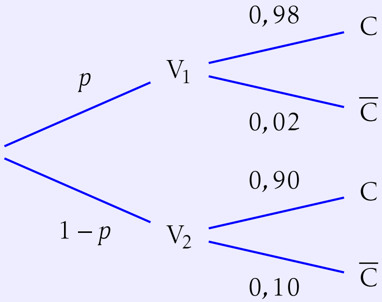
On peut construire un arbre correspondant à la situation :



Formule des probabilités totale : $P(C) = P(C \cap V_1) + P(C \cap V_2) + P(C \cap V_3)$
$= 0{,}5 \times 0{,}98 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}8$
$= 0{,}92$
Formule des probabilités conditionnelles :
$P_C(V_1) = \dfrac{P(C \cap V_1)}{P(C)} = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}98}{0{,}92} \approx 0{,}53$

2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de viande non conforme, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de viande qu'elle achète soient conformes.
Quelle proportion p de viande doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

À l'aide d'un nouvel arbre :



On sait que $P(C) = p \times 0{,}98 + (1-p) \times 0{,}9 = 0{,}08p + 0{,}9$

On veut $P(C) = 0{,}92$, donc on cherche p tel que $0{,}08p + 0{,}9 = 0{,}92$

$p = 0{,}25$

L'entreprise doit donc acheter au minimum 25% de sa viande au premier fournisseur.

Exercice 4

6 points

Partie A –

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

pour tout a et b tels que $0 < a < b$ on a

$\ln a < \ln b$ car ln est strictement croissante

$a - 3 < b - 3$ donc

$\ln a + a - 3 < \ln b + b - 3$

2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

D'après la question précédente, f est strictement croissante et continue sur $[2;3]$ et l'intervalle image est $[f(2);f(3)] \subset [-0{,}31;1{,}1]$; comme $0 \in [f(2);f(3)]$, d'après le corollaire du TVI (théorème de la bijection), il existe un unique $\alpha \in [2;3]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ en fonction de x.

Sur $]0;\alpha]$, $f(x) \leqslant 0$ et sur $[\alpha;+\infty[$, $f(x) \geqslant 0$.

Partie B –

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(\ln(x) - 2\right) + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction g en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} 1 - \dfrac{1}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) - 2 = -\infty$

par produit : $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$.

2. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$ où f est la fonction définie dans la partie A.

g est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec

$u(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ donc $u'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$v(x) = \ln(x) - 2$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$g'(x) = \dfrac{1}{x^2} \times \left(\ln(x) - 2\right) + \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \times \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{\ln(x)}{x^2} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{f(x)}{x^2}$

b) En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$, on en déduit que g est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

Partie C –

Soit $\mathscr{L}$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.

En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{L}$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

$g(x) - \ln(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\left(\ln(x) - 2\right) + 2 - \ln(x)$

$= -\dfrac{1}{x}\ln(x) + 2\dfrac{1}{x} = \dfrac{2 - \ln(x)}{2}$

Si les courbes ont un point commun, ses coordonnées doivent vérifier

$g(x) - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^2$.

Le point M de coordonnées $(\mathrm{e}^2\,;2)$ est commun aux deux courbes.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $\mathrm{H}(x) = \dfrac{1}{2}(\ln(x))^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \dfrac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \dfrac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}^2} \dfrac{2}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}^2} \dfrac{2}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}^2} \dfrac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

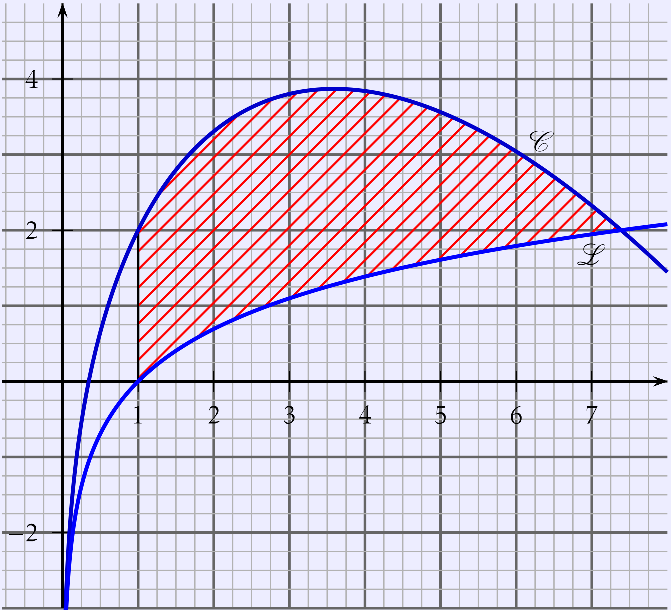
$= \left[2\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}^2} - \left[\dfrac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^{\mathrm{e}^2}$

$= 2\ln(\mathrm{e}^2) - 2\ln(1) - \dfrac{1}{2}\left(\ln(\mathrm{e}^2)\right)^2 + \dfrac{1}{2}(\ln(1))^2 = 4 - 0 - 2 + 0 = 2$

Comme $g(1) = 2$ et $\ln(1) = 0$, on a $g(1) > \ln(1)$, sachant que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{L}$ on un unique point commun d'abscisse e^2, on en déduit que sur $[1\,;e^2]$, $g(x) > \ln(x)$, donc $g(x) - \ln(x) > 0$.

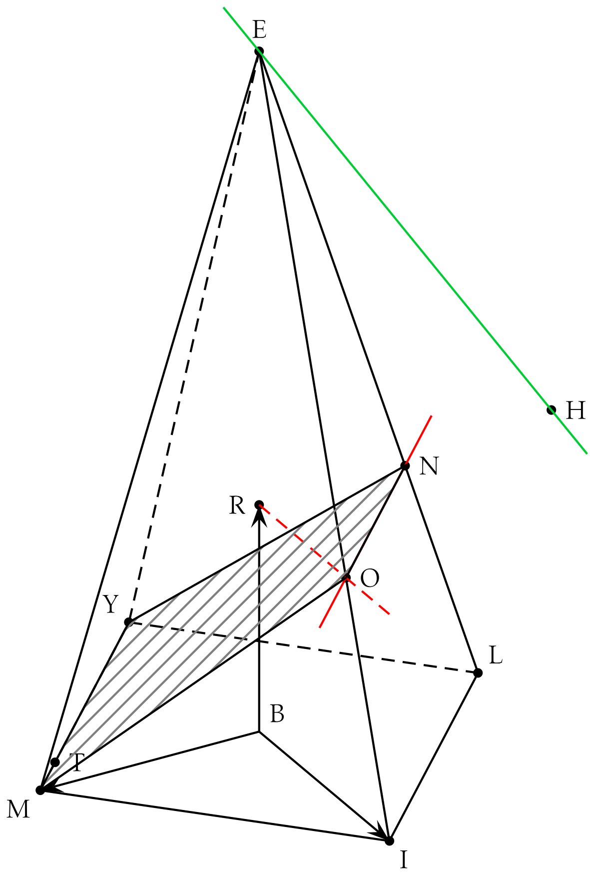
I représente l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{L}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}^2$.

pour le plaisir des yeux :



Annexe

Annexe 1 (Exercice 1)



Annexe 2 (Exercice 2)