BAC BLANC – MATHÉMATIQUES – Section S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Sujet C (non spé maths)

Une calculatrice par candidat autorisée.

Toute trace de recherche sera prise en compte pour l'évaluation.

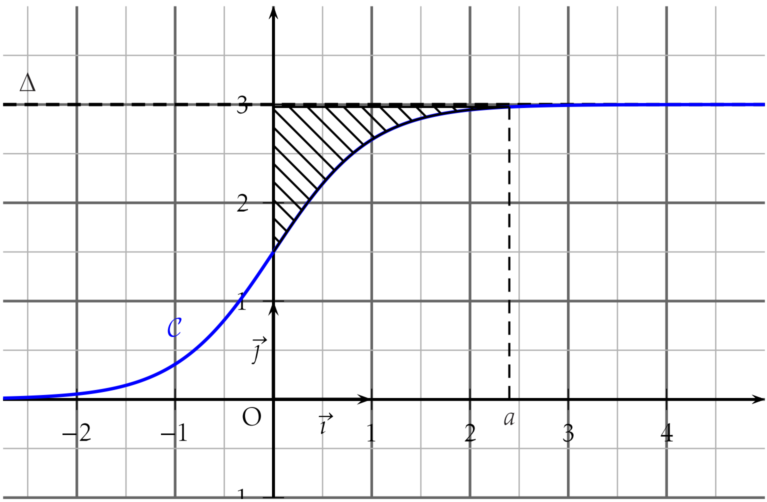
Ce sujet est inspiré de Pondichéry, avril 2015

Exercice 1 *4 points*

Partie A –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est de la forme $\dfrac{3}{u(x)}$, avec $u(x) = 1 + \mathrm{e}^{-2x}$, donc $u'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}$
$f'(x) = -\dfrac{3 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)^2} = \dfrac{6\,\mathrm{e}^{-2x}}{\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)^2}$.
pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^X > 0$, donc $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-2x} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$; ce qui signifie que la droite (Δ) d'équation $y = 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable et est strictement croissante. L'intervalle image est $[f(0) ; 3[= [1{,}5 ; 3[$. Il existe donc un réel unique $\alpha \in [0\ ;\ +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 2{,}999$.
La calculatrice donne :
$f(4{,}00) \approx 2{,}998\,99$ et $f(4{,}01) \approx 2{,}999\,01$, donc $4{,}00 < \alpha < 4{,}01$ (encadrement à 10^{-2} près).

Partie B –

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$.

On a vu dans la **partie A** que
- la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- sa limite en $-\infty$ est 0
- sa limite en $+\infty$ est 3

On en déduit que $0 < f(x) < 3$
d'où $-3 < -f(x) < 0$
$\iff 0 < 3 - f(x) < 3$
$\iff 0 < g(x)$
donc $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = -\dfrac{3}{2} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-2x}\right)$.

Démontrer que G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$G'(x) = -\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-2\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \dfrac{3\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
D'autre part : $g(x) = 3 - f(x)$
$= 3 - \dfrac{3}{1+e^{-2x}}$
$= \dfrac{3\left(1+e^{-2x}\right)-3}{1+e^{-2x}}$
$= \dfrac{3\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
Donc $G'(x) = g(x)$, G est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx$.

La fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur l'intervalle $[0\,;\,a]$ (avec $a > 0$) ; donc $\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx$ représente (en unités d'aire) la mesure de la surface limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

$\displaystyle\int_0^a g(x)\,dx = [G(x)]_0^a = G(a) - G(0)$
$= -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2\times a}\right) + \dfrac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2\times 0}\right)$
$= \dfrac{3}{2}\ln 2 - \dfrac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2\times a}\right)$
$= \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.

c) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

On remarque que cette aire se calcule grâce à $\mathcal{D}_a = \displaystyle\int_0^a 3-f(x)\,dx$ avec a qui tend vers $+\infty$.
Or $\mathcal{D}_a = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.
$\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\left(1+e^{-2a}\right) = 1$,
donc $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{2}{1+e^{-2x}} = 2$
d'où $\mathcal{D} = \dfrac{3}{2}\ln 2 \approx 1{,}04$ (u. a.)

Exercice 2

5 points

Partie A –

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = au_n + b \quad$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

Si (v_n) est géométrique de raison, cela signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = av_n$.
On sait que $v_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{b}{1-a}$

$= au_n + b - \dfrac{b}{1-a}$

$= au_n + \dfrac{b - ab - b}{1-a}$

$= au_n - \dfrac{ab}{1-a}$

D'autre part $av_n = a\left(u_n - \dfrac{b}{1-a}\right)$

$= au_n - \dfrac{ab}{1-a}$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = av_n$; la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

On sait que $v_n = v_0 \times a^n$; si $a \in]-1\ ;\ 1[$, alors la suite (v_n) converge vers 0.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a}$,

donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}$

Partie B –

En mai 2017, Arnufle achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mai, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Arnufle taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mai 2018 avant que Arnufle ne la taille ?

Après la taille de mai 2017, la plante mesure $80 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 60\,\text{cm}$.

Au bout de 1 an elle a poussé de 30 cm ; elle mesurera donc en mai 2018 avant la taille $60 + 30 = 90\,\text{cm}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mai de l'année $(2017 + n)$.

   a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$.

   D'une année sur l'autre, tailler le quart revient à multiplier par $\frac{3}{4}(= 0{,}75)$ et la pousse annuelle est de $30\,\text{cm}$, donc :
   $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$.

   b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n). Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

   Mai 2017 correspondant à $n = 0$, on a :
   $h_0 = 80$; $h_1 = 90$; $h_2 = 0{,}75 \times 90 + 30 = 97{,}5$: la suite semble être croissante.
   Initialisation : on sait déjà que $h_0 < h_1$;
   Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la propriété « $h_p < h_{p+1}$ » soit vraie, démontrons alors que la propriété « $h_{p+1} < h_{p+2}$ » est vraie.
   Démonstration : On sait que $h_p < h_{p+1}$
   $\Leftrightarrow 0{,}75h_p + 30 < 0{,}75h_{p+1} + 30$
   $\Leftrightarrow h_{p+1} < h_{p+2}$
   l'hérédité est démontrée
   Conclusion : la suite (h_n) est croissante.

   c) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

   La suite (h_n) est de la forme
   $h_{n+1} = ah_n + b$ avec $a = 0{,}75$ et $b = 30$.
   D'après la **partie A**, comme $a \in]-1\,;1[$, la suite (h_n) converge et a pour limite $\frac{b}{1-a} = \frac{30}{1-0{,}75} = 120$.
   La plante aura donc une taille inférieure à $120\,\text{cm}$.

Exercice 3

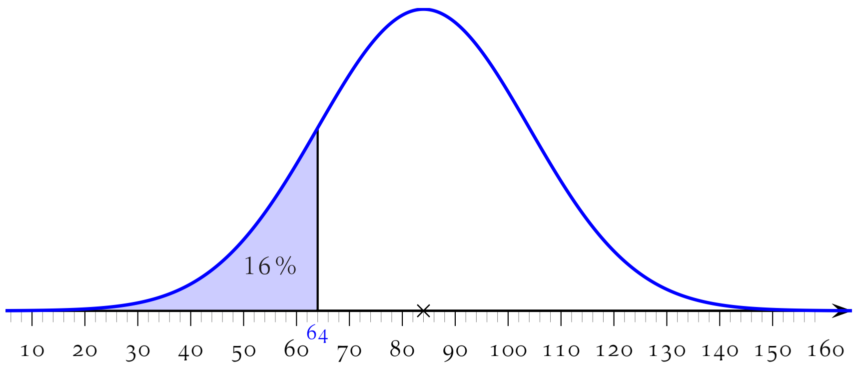
6 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment

Partie A – Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de sèche-linge par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0{,}16$.

La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. a) En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

   On sait que $\mu = 84$; on remarque que $64 = 84 - 20$ et que $104 = 84 + 20$,
   Par symétrie par rapport à μ, $P(X \geqslant 104) = 0{,}16$
   et donc $P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - 2 \times 0{,}16 = 0{,}68$.

   b) Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?

   On sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0{,}68$, on en déduit que $\sigma \approx 20$

2. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.

   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ?

   La variable Y est la variable X centrée et réduite : donc Y suit donc une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$

b) Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Y \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

$P(X \leqslant 64) = P(X - 84 \leqslant -20)$

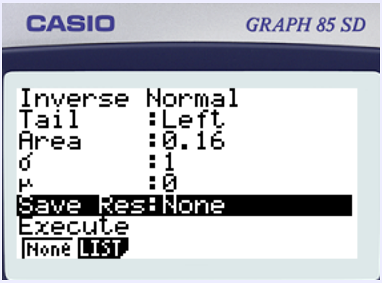
$= P\left(\dfrac{X - 84}{\sigma} \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$

$= P\left(Y \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}\right)$.

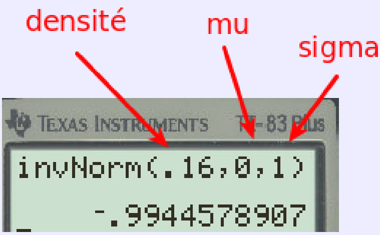
c) En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.

À l'aide de la calculatrice on cherche x tel que pour une loi normale $\mathcal{N}(0;1)$ on ait $P(Y \leqslant x) = 0{,}16$

Casio : menu Stats $\longrightarrow$ menu Dist $\longrightarrow$ menu Norm $\longrightarrow$ touche InvN puis



Ti : touche Distr $\longrightarrow$ fonction InverNorm

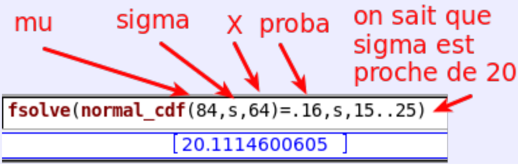


on trouve $x \approx -0{,}9945$

$-\dfrac{20}{\sigma} \approx -0{,}9945$

$\Leftrightarrow \sigma \approx 20{,}111$ à 10^{-3} près.

avec Xcas :



3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20{,}1$.
   Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
   a) Calculer la probabilité que la durée de vie du sèche-linge soit comprise entre 2 et 5 ans.

      On cherche $P(24 \leqslant X \leqslant 60)$
      à l'aide de la calculatrice (borne inf = 24 et borne sup = 60) : $P(24 \leqslant X \leqslant 60) \approx 0{,}115$

   b) Calculer la probabilité que le sèche-linge ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

      10 ans = 120 mois ; à l'aide de la calculatrice (borne inf = 120 et borne sup $= 1 \cdot 10^{99}$) : $P(X \geqslant 120) =\approx 0{,}037$.

Partie B – Étude de l'extension de garantie Electro+

Le sèche-linge est garanti gratuitement pendant les deux premières années.

L'entreprise Electro+ propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.

Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
   a) Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de pro-

babilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.

Soit C est la variable aléatoire donnant le nombre de clients ayant pris l'extension de garantie. Les tirages sont indépendants et de même probabilité 0,115, donc C suit la loi binomiale $\mathscr{B}(12\,;\,0{,}115)$.
Exactement 3 de ces clients : on cherche $P(C = 3)$.
À l'aide de la calculatrice : $P(C = 3) \approx 0{,}111$ au millième près.

b) Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

$P(C \geqslant 6) = 1 - P(C \leqslant 5)$. À l'aide de la calculatrice $P(C \geqslant 6) \approx 0{,}001$ au millième près.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, Electro+ remboursera au client la valeur initiale du sèche-linge, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Z la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise Electro+, grâce à l'extension de garantie.

a) Justifier que Z prend les valeurs 65 et −334, puis donner la loi de probabilité de Z.

- Si le client utilise l'extension le gain algébrique est $65 - 399 = -334$;
- Si le client n'utilise pas l'extension le gain algébrique est 65.

La variable aléatoire Z prend donc deux valeurs 65 et −334.
Or on sait que 11,5 % des clients font jouer leur garantie, on en déduit que $P(Z = -334) = 0{,}115$ et que $P(Z = 65) = 0{,}885$.

b) Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.

On a $E(Z) = 65 \times 0{,}885 + (-334) \times 0{,}115 = 19{,}115$. L'offre est donc avantageuse pour l'entreprise puisque celle gagne environ 19 € par client.

Exercice 4

5 points

Soit un cube EMILYBRO d'arête 1.

Dans le repère $\left(\text{E}\,;\overrightarrow{\text{EM}},\,\overrightarrow{\text{EL}},\,\overrightarrow{\text{EY}}\right)$, on considère les points N, T et P de coordonnées respectives $\text{N}\left(1\,;1\,;\dfrac{3}{4}\right)$, $\text{T}\left(0\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$, $\text{P}\left(1\,;0\,;-\dfrac{5}{4}\right)$.

1. Placer N, T et P sur la figure donnée en annexe.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{NT}}$ et $\overrightarrow{\text{NP}}$.
En déduire que les points N, T et P ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{\text{NT}} = \left(-1\,;-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\right)$ et $\overrightarrow{\text{NP}} = (0\,;-1\,;-2)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\text{NT}}$ et $\overrightarrow{\text{NP}}$ ne sont pas colinéaires, les droites (NT) et (NP) ne sont pas parallèles donc les points N, T et P ne sont pas alignés.

3. On considère l'algorithme 1 donné en annexe.

a) Exécuter *à la main* cet algorithme avec les coordonnées des points N, T et P données ci-dessus.

On entre : x_A prend la valeur de $x_\text{N} = 1$, y_A prend la valeur de $y_\text{N} = 1$, z_A prend la valeur de $z_\text{N} = 0{,}75$, x_B prend la valeur de $x_\text{T} = 0$, y_B prend la valeur de $y_\text{T} = 0{,}5$, z_B prend la valeur de $z_\text{T} = 1$, x_C prend la valeur de $x_\text{P} = 1$, y_C prend la valeur de $y_\text{P} = 0$, z_C prend la valeur de $z_\text{P} = -1{,}25$

a prend la valeur $x_\text{B} - x_\text{A} = -1$

b prend la valeur $y_\text{B} - y_\text{A} = -0{,}5$

c prend la valeur $z_\text{B} - z_\text{A} = 0{,}25$

d prend la valeur $x_\text{C} - x_\text{A} = 0$

e prend la valeur $y_\text{C} - y_\text{A} = -1$

f prend la valeur $z_\text{C} - z_\text{A} = -2$

k prend la valeur $a \times d + b \times e + c \times f$

donc $k = -1 \times 0 + (-0{,}5) \times (-1) + 0{,}25 \times (-2) = 0$

b) À quoi correspond le résultat affiché par l'algorithme ? Qu'en déduire pour le triangle NTP ?

L'algorithme 1 calcule le produit scalaire $\overrightarrow{NT} \cdot \overrightarrow{NP}$, comme ce produit est nul, les vecteurs sont orthogonaux ; donc les droites (NT) et (NP) sont perpendiculaires ; le triangle NTP est donc rectangle en N.

4. On considère l'algorithme 2 donné en annexe. Le compléter pour qu'il teste et affiche si un triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

5. On considère le vecteur $\vec{n}(5\ ;\ -8\ ;\ 4)$ normal au plan (NTP).

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (NTP).

$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (NTP) donc une équation est :
$5x - 8y + 4z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$;
Or $T(0\,;0{,}5\,;1) \in (NTP)$, donc ses coordonnées doivent vérifier
$5 \times 0 - 8 \times 0{,}5 + 4 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$
Une équation cartésienne du plan (NTP) est donc $5x - 8y + 4z = 0$.

b) On considère la droite Δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{n}$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

On a $B(1\,;0\,;1)$. Comme Δ passe par B et qu'un vecteur directeur est $\vec{n}$:

$$\begin{cases} x = x_B + \lambda x_{\vec{u}} \\ y = y_B + \lambda y_{\vec{u}} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_B + \lambda z_{\vec{u}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = -8\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

6. Soit K le point d'intersection du plan (NTP) et de la droite Δ.

a) Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

Les coordonnées de K l'équation paramétrique de Δ donc $K(1 + 5\lambda\,;-8\lambda\,;1 + 4\lambda)$
K appartient au plan (NTP), donc ses coordonnées vérifient :
$5(1 + 5\lambda) - 8 \times (-8\lambda) + 4(1 + 4\lambda) = 0$
$\Leftrightarrow 105\lambda + 9 = 0$
$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{9}{105} = -\frac{3}{35}$.

D'où $x = 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{4}{7}$
$y = -8 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{24}{35}$
$z = 1 + 4 \times \left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{23}{35}$.
Donc $K = \left(\frac{4}{7}\,;\frac{24}{35}\,;\frac{23}{35}\right)$.

b) On donne $BK = \sqrt{\dfrac{27}{35}}$.

Calculer le volume du tétraèdre NTPB.

Puisque (BK) est orthogonale au plan (NTP), [BK] est hauteur du tétraèdre NTPB,
donc $V_{NTPB} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}_{NTP} \times BK$.
Or NTP est rectangle en N, donc $\mathscr{A}_{NTP} = \dfrac{NT \times NP}{2}$.

$NT^2 = 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{21}{16}$

d'où $NT = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$;

$NP^2 = 1 + 4 = 5$

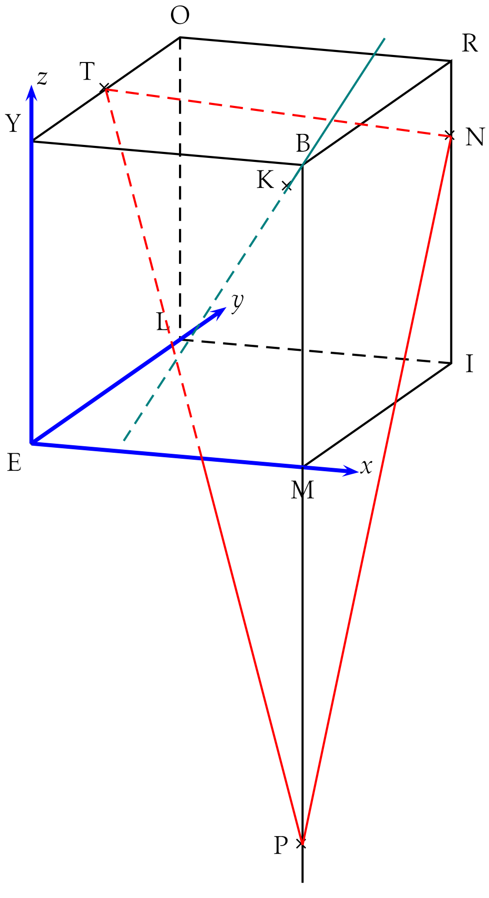
d'où $NP = \sqrt{5}$;

Donc $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{21}}{4} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{\dfrac{27}{35}}$

$V = \dfrac{3}{8}$.

ANNEXE à remettre avec la copie

EXERCICE 4



Algorithme 1

Saisir x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C
a prend la valeur $x_B - x_A$
b prend la valeur $y_B - y_A$
c prend la valeur $z_B - z_A$
d prend la valeur $x_C - x_A$
e prend la valeur $y_C - y_A$
f prend la valeur $z_C - z_A$
k prend la valeur $a \times d + b \times e + c \times f$
Afficher k

Algorithme 2 (à compléter)

Saisir x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C
a prend la valeur $x_B - x_A$
b prend la valeur $y_B - y_A$
c prend la valeur $z_B - z_A$
d prend la valeur $x_C - x_A$
e prend la valeur $y_C - y_A$
f prend la valeur $z_C - z_A$
k prend la valeur $a \times d + b \times e + c \times f$
Si $k = 0$ alors
    l prend la valeur $a^2 + b^2 + c^2$
    m prend la valeur $d^2 + e^2 + f^2$
    Si $l = m$ alors
        Afficher "le triangle est rectangle isocèle en A"
    sinon
        Afficher "le triangle est rectangle en A, mais n'est pas isocèle"
    Fin si
sinon
    Afficher "le triangle n'est pas rectangle"
Fin si
avec $l = AB^2$ et $m = AC^2$