BAC BLANC – MATHÉMATIQUES – Section S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 exercices MAIS :

- Les candidats *n'ayant pas* la spécialité maths doivent traiter les exercices suivants : n^{os} 1 ; 2 ; $\boxed{3}$ et 5
- Les candidats *ayant* la spécialité maths doivent traiter les exercices suivants : n^{os} 1 ; 2 ; $\boxed{4}$ et 5

Une calculatrice par candidat autorisée.

Toute trace de recherche sera prise en compte pour l'évaluation.

Quelques sources de *légers* énervements.

- Merci de ne pas créer de jeux de piste dans votre copie ! Ne mélangez pas les réponses des différents exercices ! !
- Quitte pour certains à ne pas faire grand chose : profitez du temps que vous avez pour rendre votre copie présentable (sautez des lignes, soulignez, encadrez, faites des phrases – au moins sujet, verbe, complément –)
- Les réponses du corrigé « grâce à ma calculatrice » ne sont pas vraiment celles attendues, mais rentabilisez là ! ! Au moins pour simplifier les fractions et vérifier certains résultats !
- Et enfin, ce n'est pas parce que les sujets sont formulés « vérifier que… » qu'il faut essayer d'arnaquer le correcteur en calculant n'importe comment ou en citant un théorème (faux) de votre invention ! !

Exercice 1

5 points

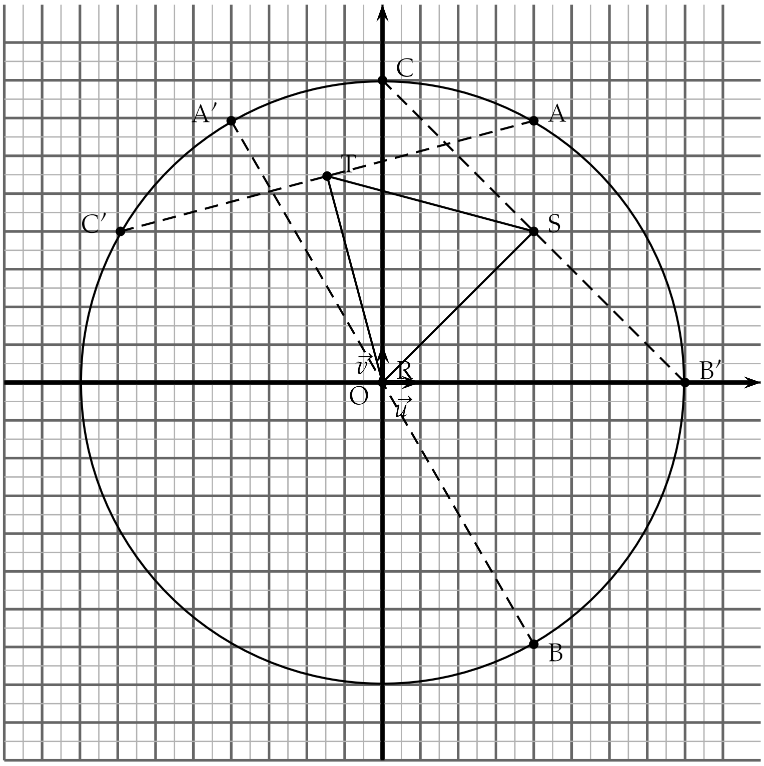
D'après Métropole, juin 2015

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0$$

$z^2 - 8z + 64 = 0$ est une équation du second degré. $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = -3 \times 64$ Comme $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions conjuguées dans $\mathbb{C}$: $z_1 = \dfrac{-(-8) - i\sqrt{3 \times 64}}{2 \times 1} = \dfrac{8 - 8i\sqrt{3}}{2} = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_2 = 4 + 4i\sqrt{3}$.	Grâce à ma calculatrice Casio en mode `complexe : a+ib` et au menu solveur, Grâce à ma calculatrice Ti et son solveur - PlySmlt2 en précisant solutions `complexe : a+ib` je trouve immédiatement : $z_1 = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $z_2 = 4 - 4i\sqrt{3}$ Quand même 75€ à rentabiliser !

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$ (à dessiner au centre de votre copie, unité le centimètre ou le grand carreau).



2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

a) Calculer le module et un argument du nombre a.

$a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, donc $\mathfrak{Re}(a) = 4$ et $\mathfrak{Im}(a) = 4\sqrt{3}$, d'où $|a| = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 8$

Soit $\theta = \arg(a)$, on sait que : $\cos\theta = \dfrac{\mathfrak{Re}(a)}{|a|} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

et que $\sin\theta = \dfrac{\mathfrak{Im}(a)}{|a|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

donc un argument de a est $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Grâce aux fonctions `module` et `argument` de ma calculatrice, je trouve immédiatement $|a| = 8$ et $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$...

b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

D'après la question précédente : $a = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$; on remarque que $b = \overline{a}$, on en déduit que $\arg(b) = -\arg(a)$, d'où $b = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

D'après les questions précédentes : $|a| = |b| = |c| = 8$, donc les points A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 8.

d) Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2d complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a) Montrer que $b' = 8$.

On sait que $b = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$,
donc $b' = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8\,\mathrm{e}^{0} = 8$

Grâce à ma belle calculatrice (75€ !) je trouve immédiatement $b' = 8$

b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

On sait que $a = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, donc $a' = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)} = 8\,\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$
On en déduit : $|a'| = 8$ et $\arg(a') = \dfrac{2\pi}{3}$.

Grâce à ma belle calculatrice (75€, quand même !) je trouve immédiatement $|a'| = 8$ et $\arg(a') = \dfrac{2\pi}{3}$

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.

a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
Calculer r et s. On admet que $t = 2-2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)$.

On sait que $a' = -4+4i\sqrt{3}$ et $b = 4-4i\sqrt{3}$ (donnés dans l'énoncé !), donc $r = 0$.

On sait que $b' = 8$ et $c = 8i$ (donnés dans l'énoncé !) donc $s = 4+4i$

b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Le triangle RST semble être équilatéral. Pour le démontrer, on peut par exemple démontrer que RS = RT et que $\left(\widehat{\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

RS $= |s-r| = |4-4i| = 4\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 4).

RT $= |t-r| = \left|2-2\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)\right| \overset{\text{calc}}{=} 4\sqrt{2}$ (immédiat à l'aide de la calculatrice !)

donc RS = RT.

on a $\left(\widehat{\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{RT}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{RS}}\right)$

or $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{RT}}\right) = \arg(t) \overset{\text{calc}}{=} \dfrac{7\pi}{12}$ (grâce à ma belle calculatrice !) et de même $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{RS}}\right) = \arg(s) = \dfrac{\pi}{4}$ (j'aurais pu utiliser ma belle calculatrice, mais comme c'est la diagonale d'un carré de côté 4 et que je suis en TS, j'évite d'abuser. . .)

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT}}\right) = \dfrac{7\pi}{12} - \dfrac{\pi}{4} \overset{\text{calc}}{=} \dfrac{\pi}{3}$ (je l'ai trouvé grâce à ma belle calculatrice qui sait calculer les fractions avec π !)

Bon, après correction de mon paquet de copies, je m'aperçois que vous préférez calculer les longueurs des trois côtés. . . C'est bien aussi ;-)

Conclusion, le triangle RST est bien équilatéral (enfin je crois, parce qu'il n'y a pas de fonction `est-triangle-equilatéral` implémentée dans ma jolie calculatrice – 75€ c'est quand même 13 grecs-frites –).

Exercice 2

5 points

D'après Antilles-Guyanne, juin 2014

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x+1+\frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1-x+\mathrm{e}^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues).
En déduire le signe de $g(x)$.

dérivée de g
$g(x) = 1-x+\mathrm{e}^x$, donc $g'(x) = -1+\mathrm{e}^x$.

signe de la dérivée
on cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $g'(x) \geqslant 0$
$\Leftrightarrow -1+\mathrm{e}^x \geqslant 0$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1$
$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0$
$\Leftrightarrow x \geqslant 0$.

tableau de variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $g'(x)$	$-$		$+$
variations de g	↘	2	↗

Par lecture du tableau de variations, quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on a toujours $g(x) \geqslant 2$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$.

2. Déterminer, en détaillant, les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

limite en $-\infty$

remarque : on peut écrire $f(x) = x + 1 + x \times \dfrac{1}{e^x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$,

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$,

et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\dfrac{1}{e^x} = -\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

limite en $+\infty$

d'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

$f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x} = x + 1 + x e^{-x}$

donc $f'(x) = 1 + 1 \times e^{-x} + x \times (-1) e^{-x}$

$f'(x) = 1 + e^{-x} - x e^{-x}$

$= e^{-x}(e^x + 1 + x)$

$= e^{-x} g(x)$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $e^{-x} > 0$, comme pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$ et donc que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'où le tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

On sait que f est continue et est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc (TVI) il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

on a $f(-1) = 0 + \dfrac{-1}{e^{-1}} = -e < 0$ et $f(0) = 1$, comme f est continue et est strictement croissante sur $[-1\,;0]$ et qu'elle change de signe, on en déduit que $\alpha \in [-1\,;0]$.

6. a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a s'écrit $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, donc pour $a = 0$ on trouve : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ on a $f'(0) = e^0 \times g(0) = 2$ et $f(0) = 1$, donc $y = 2x + 1$

b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

Pour connaître la position relative de la courbe et de la droite, on étudie le signe $f(x) - (2x+1)$.

$f(x) - (2x+1) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x} - 2x - 1$

$= -x + x e^{-x}$

$= x(-1 + e^{-x})$

On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 + e^{-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow e^{-x} \geqslant e^0 \Leftrightarrow -x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de x	$-$	0	$+$
signe de $(-1 + e^{-x})$	$+$	0	$-$
signe de $f(x) - (2x+1)$	$-$	0	$-$

donc la tangente est toujours au dessus de la courbe représentative de f.

Exercice 3 Pour les candidats N'ayant PAS choisi la spécialité Maths *5 points*

d'après Amérique du Sud, novembre 2015

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

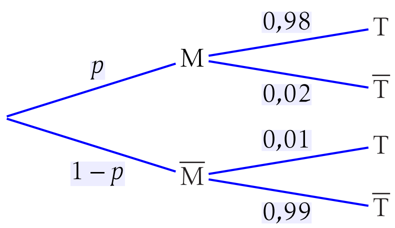
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{\mathrm{M}}$ (respectivement $\overline{\mathrm{T}}$) l'événement contraire de l'événement M (respectivement T).

On note p (avec $0 \leqslant p \leqslant 1$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. **a)** Dessiner sur votre copie l'arbre de probabilités correspondant à cette situation.



b) Exprimer $\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})$, $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}\right)$ puis $\mathrm{P}(\mathrm{T})$ en fonction de p.

$\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \times \mathrm{P}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = p \times 0{,}98 = 0{,}98p$
$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{M}}) \times \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = (1-p) \times 0{,}01$

$\mathrm{P}(\mathrm{T}) = \mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{T}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{M}} \cap \mathrm{T})$ (probabilités totales)
$\mathrm{P}(\mathrm{T}) = 0{,}98p + 0{,}01(1-p) = 0{,}97p + 0{,}01$

2. **a)** Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

par définition : $\mathrm{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{M} \cap \mathrm{T})}{\mathrm{P}(\mathrm{T})} = \dfrac{0{,}98p}{0{,}97p+0{,}01} = \dfrac{100 \times 0{,}98p}{100 \times (0{,}97p + 0{,}01)} = \dfrac{98p}{97p+1}$

b) Étudier les variations de la fonction f.

élève rusé

f est une fonction homographique de la forme $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ donc sa dérivée est de la forme $\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ avec ici $a = 98$, $b = 0$, $c = 97$ et $d = 1$ (et $p = x$)

d'où $f'(p) = \dfrac{98}{(97p+1)^2}$

élève normal

f est une fonction rationnelle avec $u(p) = 98p$ (donc $u'(p) = 98$) et $v(p) = 97p+1$ (donc $v'(p) = 97$),

d'où $f'(p) = \dfrac{98 \times (97p+1) - 98p \times 97}{(97p+1)^2} = \dfrac{98}{(97p+1)^2}$

donc pour tout $p \in [0\,;1]$ on a $f'(p) > 0$, la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;1]$.

p	0	1
variations de f	0	↗ 1

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0{,}95$.
À partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

Cela revient à chercher p tel que $\mathrm{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) \geqslant 0{,}95$, or $\mathrm{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{M}) = f(p)$, donc on cherche $p \in [0\,;1]$ tel que $f(p) \geqslant 0{,}05$

$\dfrac{98p}{97p+1} \geqslant 0{,}95$

$\Leftrightarrow 98p \geqslant 0{,}95 \times (97p+1)$ car $97p+1 > 0$

$\Leftrightarrow 98p - 92{,}15p \geqslant 0{,}95$

$\Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{0{,}95}{5{,}85} \approx 0{,}16$

Le test est fiable si la proportion de malades dans la population est supérieure à 16 %.

4. On admet dans cette question que $\mathrm{P}(\mathrm{T}) = 0{,}17$. On teste une population de 250 personnes. On appelle X le nombre de tests positifs.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Justifier.

L'expérience aléatoire n'admet que deux issues. On admet que les tests sont répétés de façon identiques et indépendantes : nous avons donc un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0{,}17$.

b) Quelle est la probabilité qu'au moins 42 personnes aient un test positif ?

On veut calculer $P(X \geqslant 42) = 1 - P(X \leqslant 41)$.
À l'aide la calculatrice (fonction Bcd), on calcule $P(T \leqslant 41) \approx 0{,}44$, donc $P(X \geqslant 42) \approx 0{,}56$.

Exercice 4 Pour les candidats AYANT choisi la Spécialité maths *5 points*

Partie A –

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111,... sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1. Pour tout entier naturel p non nul, on note Np le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$\mathrm{N}p = \underbrace{1111\ldots111}_{p \text{ répétitions du chiffre } 1} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul. L'objet de cette partie est d'étudier la divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers.

1. Montrer que Np n'est divisible ni par 2 ni par 5.

2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de Np par 3.

a) Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \mod 3$.

b) En déduire que $\mathrm{N}p \equiv p \mod 3$.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit Np soit divisible par 3.

3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de Np par 7.

a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ tel que $10^m \equiv a \mod 7$. On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
$a \equiv \ldots \mod 7$	1	3	2	-1	-3	-2	1

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que $10^p \equiv 1 \mod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B –

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.

On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. a) Traduire par une phrase la probabilité $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$ puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes : $P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1)$; $P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1)$ et $P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$.

b) Exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne définie par :

$$R_n = (P(X_n = 0) \;\; P(X_n = 1) \;\; P(X_n = 2))$$

.

a) Déterminer la matrice M telle que pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = R_n \times M$.

b) On note R_0 la matrice ligne $(0\ 0\ 0)$. Déterminer R_1.

c) On admet que $M = B \times D \times B^{-1}$ avec $B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Établir que, pour tout entier naturel n, $M^n = B \times D^n \times B^{-1}$

d) On admet que, pour tout entier naturel n, $R_n = R_0 \times M^n$ et on donne, pour n non nul :

$$M^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 1 & \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}} + 4 & \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 1 \\ \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + 1 & \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 4 & \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} + 1 \\ \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 1 & \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2}} + 4 & \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} + 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer, puis interpréter les limites suivantes :
$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 2)$.

Exercice 5

5 points

d'après Asie, juin 2013 L'objet de cet exercice est d'étudier certaines propriétés des suites définies par leur premier terme u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{1 + ku_n}{k + u_n}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Partie A – Étude pour $k = 3$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

On veut démontrer la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$ »

Initialisation : $u_0 = 2$ et $2 > 1$, donc la propriété est vraie au rang 0

Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $u_p > 1$ » soit vraie ;
démontrons qu'alors la propriété « $u_{p+1} > 1$ » est vraie.

Démonstration :

- si on part de l'hypothèse de récurrence : on sait que $u_p > 1$ donc $1 + 3u_p > 4$ d'une part et $\frac{1}{4} > \frac{1}{3+u_p} > 0$ d'autre part
  on est coincé…
- si on part de $u_{p+1} = \dfrac{1+3u_p}{3+u_p}$
  $= \dfrac{-8+9+3u_p}{3+u_p} = \dfrac{-8}{3+u_p} + 3$
  comme $u_p > 1$ par (HR), $3 + u_p > 4$
  et $0 < \dfrac{1}{3+u_p} < \dfrac{1}{4}$
  d'où $0 > \dfrac{-8}{3+u_p} > -2$
  $3 > \dfrac{-8}{3+u_p} + 3 > 1$
  d'où $u_{p+1} > 1$
  mais il y a de forte chances, que nombre d'entre vous n'aient pas vu cette seconde solution !!
- Une autre méthode ? Ok :
  on part de l'hypothèse de récurrence :
  $u_p > 1 \Leftrightarrow u_p - 1 > 0$
  puis on cherche à démontrer que $u_{p+1} - 1 > 0$.
  $u_{p+1} - 1 = \dfrac{1+3u_p}{3+u_p} - 1$
  $= \dfrac{1+3u_p-3-u_p}{3+u_p} = \dfrac{2(u_p-1)}{3+u_p}$
  or par HR : $u_p - 1 > 0$ d'où $3 + u_p > 4 > 0$
  donc $u_{p+1} - 1 > 0$
- Dernière option étudier la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+3x}{3+x}$ (Une fonction homographique, dont la dérivée est évidente (?))
  d'où $f'(x) = \dfrac{8}{(x+3)^2}$, la fonction f est donc croissante sur $]0\,,+\infty[$.
  par (HR) : $u_p > 1$, comme la fonction f est croissante :
  $f(u_p) > f(1) \Leftrightarrow u_{p+1} > 1$
  car $f(1) = 1$.

Conclusion : Pour tout entier naturel, $u_n > 1$

L'idée que j'ai vu dans presque toutes les copies (à la rédaction près) :
On sait que $u_0 = 2$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$
On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 1$

Initialisation : $u_0 = 2$ et $2 > 1$, donc la propriété est vraie au rang 0
Hypothèse de récurrence : supposons qu'il existe un entier p tel que la propriété « $u_p > 1$ » soit vraie ; démontrons qu'alors la propriété « $u_{p+1} > 1$ » est vraie.
Démonstration : on sait (HR) : $u_p > 1 \Leftrightarrow 1+3u_p > 4$ ($\bigstar$) et $3+u_p > 4$.
pour tout réel $x > 4$, on a $\dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{x} > 0$ ($\bigstar\bigstar$)
d'où les résultats suivants (en posant $x = 3+u_p$) :

- $\dfrac{1+3u_p}{4} > 1$ en multipliant ($\bigstar$) par $\dfrac{1}{4}$;
- $\dfrac{1+3u_p}{3+u_p} > \dfrac{4}{3+u_p}$ en multipliant ($\bigstar$) par $\dfrac{1}{1+3u_p}$;
- $\dfrac{1+3u_p}{4} > \dfrac{1+3u_p}{3+u_p}$ en multipliant ($\bigstar\bigstar$) par $1+3u_p$;
- $1 > \dfrac{4}{3+u_p}$ en multipliant ($\bigstar\bigstar$) par 4.

On veut montrer à l'aide de ces égalités que $\dfrac{1+3u_p}{3+u_p} > 1$
Comment faites-vous ? ?
Conclusion : RIEN DU TOUT !

2. **a)** Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n = \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} = \frac{1-u_n^2}{3+u_n} = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
En déduire que la suite (u_n) converge.

On sait que $u_n > 1$, donc $u_n + 3 > 4 > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le même que celui de $(1-u_n)(1+u_n)$.
On reconnaît un polynôme du second degré, le coefficient de u_n^2 est négatif, donc $(1-u_n)(1+u_n) > 0$ pour $u_n \in [-1\,;1]$.

Comme $u_n > 1$, on en déduit que $(1-u_n)(1+u_n) < 0$ et par suite $u_n n + 1 - u_n < 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante.

(u_n) est une suite décroissante et minorée : elle converge.

Partie B – Étude pour $k = 0{,}5$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+0,5u_n}{0,5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	**pour** i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0,5u}{0,5+u}$ Afficher u **fin pour**

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u	0,8	1,077	0,976

2. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

À la lecture du tableau : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

Si la suite (v_n) est géométrique, alors il existe un réel q tel que $v_{n+1} = qv_n$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} = \frac{\dfrac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n} - 1}{\dfrac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n} + 1} = \frac{1+0{,}5u_n - 0{,}5 - u_n}{0{,}5+u_n} \times \frac{0{,}5+u_n}{1+0{,}5u_n+0{,}5+u_n} = \frac{-0{,}5(u_n-1)}{1{,}5(u_n+1)} = \frac{-1}{3}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{-1}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+1} = \dfrac{1}{3}$

b) Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

D'après la question précédente (définition d'une suite géométrique), $v_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n \times \dfrac{1}{3}$

4. **a)** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

Par définition $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$, donc on peut pas avoir $v_n = 1$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

$v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$ donc $(u_n+1)v_n = u_n - 1$
$u_n \times v_n - u_n = -v_n - 1$
$u_n \times (v_n - 1) = -(1+v_n)$

comme pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \neq 1$ on a : $u_n = \dfrac{-(1+v_n)}{v_n-1}$

d'où $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

On sait que (v_n) est une suite géométrique de raison comprise dans l'intervalle $]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

oO°Oo