| | |
|---|---|
| **FCT03** | Interprétation graphique des limites |
| **FCT04** | Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires dans la résolution d'équation |
| **FCT05** | Calculer la dérivée d'une fonction composée $\sqrt{u}, u^n, f(ax+b)$ |

correction

| | | |
|---|---|---|
| REP | 1.A.1 lire pour justifier continuité | 0,5 |
| REP | 1.A.2 lire pour justifier dérivabilité | 1 |
| REP | 1.A.3 lire pour résoudre équation | 1 |
| FCT01 | 1.B. Continuité : calcul de limite / d'image | 1 |
| FCT03 | Continuité : interpréter résultat | 0,5 |
| REP | Dérivabilité : justification | 0,5 |
| RAI | Equation : méthode (dérivée – variations – TVI) | 1 |
| FCT05 | Equation : dérivée de $u^n$ – formule | 0,5 |
| CAL | Equation : dérivée de $u^n$ – calcul | 1 |
| CAL | Equation : dérivée de $u^n$ – signe | 0,5 |
| FCT05 | Equation : dérivée de sqrt(u) – formule | 0,5 |
| ANT | Equation : dérivée d'un quotient – formule | 0,5 |
| CAL | Equation : dérivée d'un quotient – calcul | 1 |
| CAL | Equation : dérivée de sqrt(u) – calcul | 1 |
| ANT | Equation : signe polynôme degré 2 | 2 |
| COM | Equation : tableau de variation + images | 1,5 |
| FCT04 | Equation : utilisation du TVI | 1 |
| | total | 15 |
| RAI | 2.A.1 expression de f : méthode (racine + image → équation) | 1 |
| CAL | expression de f : calculs | 1 |
| ANT | 2.A.2 dérivée produit | 2 |
| FCT01 | calculer limite | 0,5 |
| REP | 2.B.1 interpréter f(3)=0 | 0,5 |
| ANT | 2.B.2 dérivée second degré | 0,5 |
| REP | interpréter nombre dérivé | 1 |
| REP | 2.B.3 écrire systeme | 0,5 |
| CAL | résoudre systeme | 2 |
| | total | 9 |

# Co1

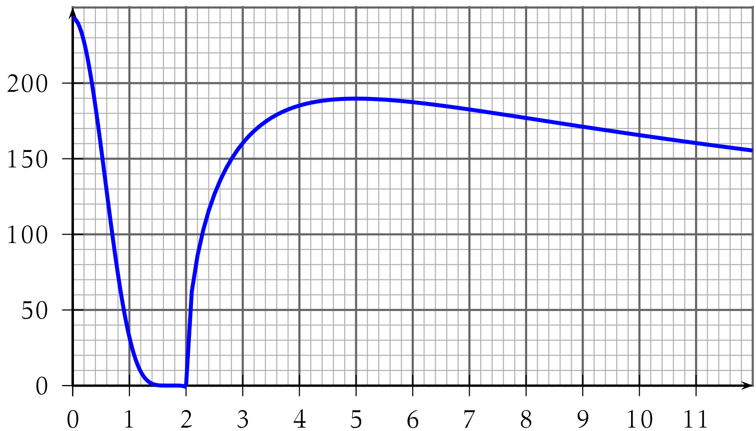
24 points, mais note sur 20 – on peut avoir 24/20 !

## Exercice 1 — Coup de ciseaux dans un pliage *15 points*

Lors d'une recherche, après quelques plis et un coup de ciseaux dans une feuille de papier, des élèves de T^ale^ S trouvent la fonction suivante :

$$g(x) = \begin{cases} (3 - x^2)^5 & \text{si } x \in [0\,;2[ \\ 600\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+5}} & \text{si } x \in [2\,;12] \end{cases}$$

Le graphique donne la courbe représentative de la fonction $g$.




### Partie A – Lectures graphiques

Répondre aux questions suivantes en justifiant à l'aide d'une lecture graphique (vous pouvez compléter le graphique pour étayer vos réponses) :

1. La fonction $g$ semble-t-elle continue en 2 ?
   La fonction semble continue : on ne distingue pas de trou.
2. La fonction $g$ semble-t-elle dérivable en 2 ?
   La fonction ne semble pas dérivable : les pentes des tangente en $x = 2$ ne semblent pas égales.

3. Combien de solutions semble avoir l'équation $g(x) = 190$ ?
Selon la précision de la lecture, vous pouvez répondre : 1 ou 2 ou 3 ;-)

### Partie B – Quelques calculs

Confirmer ou infirmer les réponses précédentes à l'aide de calculs.

Aide : en cas de blocage, admettre que sur $[2;12]$, $g'(x)$ est du signe de $-x^2 + 4x + 5$.

#### Continuité

**sur** $[0;2[$, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} g(x) = (2^2 - 3)^5 = -1$

**sur** $[2;12]$, $g(2) = 600\sqrt{\dfrac{2-2}{2^2+5}} = 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} g(x) \neq g(2)$, la fonction n'est pas continue en 2.

#### Dérivabilité

La fonction n'étant pas continue en 2, elle ne peut pas être dérivable en 2.

#### Équation

Pour trouver le nombre de solutions, il faut étudier les variations de la fonction.

**sur** $[0;2[$, $g$ est de la forme $(u(x))^5$ avec $u(x) = 3 - x^2$ et donc $u'(x) = -2x$.

Donc $g'(x) = 5 \times (-2x) \times (3 - x^2)^4$ donc $g'(x)'$ s'annule en $x = \sqrt{3}$ et est du signe de $(-x)$, c'est à dire négative sur $[0;2[$

**sur** $[2;12]$, $g$ est de la forme $\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = \dfrac{x-2}{x^2+5}$, or $u(2) = 0$, donc l'ensemble de dérivabilité est $]2;12]$

donc $u'(x) = \dfrac{1 \times (x^2+5) - (x-2) \times 2x}{(x^2+5)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x + 5}{(x^2+5)^2}$

donc $g'(x) = \dfrac{-x^2+4x+5}{(x^2+5)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}$

$g'(x)$ est du signe de $-x^2+4x+5$

On remarque que $\mathrm{P}(x) = -x^2+4x+5$ admet deux racines évidentes $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$.

On en déduit le tableau de variations de $g$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $2$ | | $5$ | | $12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| signe de $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| variations de $g$ | $243$ | | $\searrow$ | | $1$ \|\| $0$ | $\nearrow$ | $60\sqrt{10}$ $\approx 189{,}73$ | $\searrow$ | $600\sqrt{\frac{10}{149}}$ |

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 190$ admet une unique solution. Elle est dans l'intervalle $[0\,;2[$.

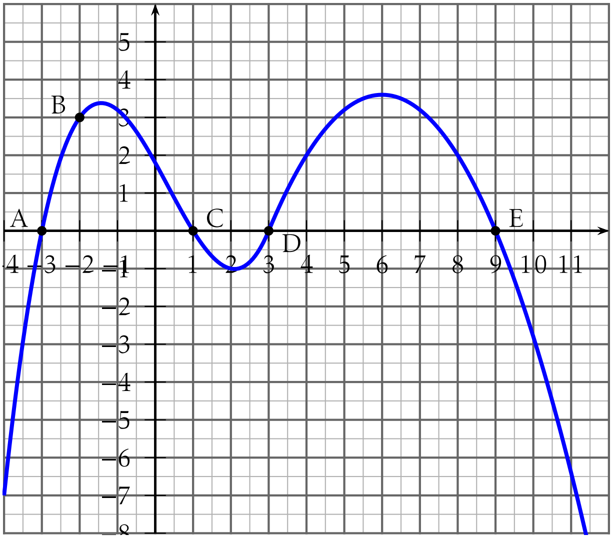
## Exercice 2 — Dur métier

*9 points*

Un prof de maths en T^ale S veut évaluer ses élèves sur la continuité et la dérivabilité de fonctions définies par morceaux.

Pour cela il cherche une courbe qui semble « lisse » et **qui passe par des points à coordonnées entières** (pour simplifier les calculs de ses élèves bien aimés...).

Il pense que « coller » une cubique et une parabole peut donner le résultat escompté : en effet il obtient assez rapidement le graphique suivant (les points indiqués sont ceux à coordonnées entières) : **la fonction $f$ obtenue est définie sur les intervalles $[-4\,;3[$ et $[3\,;50]$ et est continue et dérivable en 3**.




## Partie A – Cubique

Une cubique est la courbe représentative d'un polynôme de degré 3.

**1.** À l'aide des indications données par le graphique, retrouver l'équation de la cubique, courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[-4\,;3[$.
Rappel : si un polynôme P de degré 3 admet trois racines $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, alors il peut se factoriser sous la forme : $P(x) = k(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On sait que ce polynôme admet trois racines : $-3$, $1$ et $3$ (points A, C et D à coordonnées entières).
Donc l'expression de $f$ est $f(x) = k(x-(-3)) \times (x-1) \times (x-3)$.
Or $f(-2) = 3$ (point B à coordonnées entières),
il faut donc $k \times (-2-(-3)) \times (-2-1) \times (-2-3) = 3$
$\Leftrightarrow k \times (-3) \times (-5) = 3$
$\Leftrightarrow k = \dfrac{1}{5}$
Donc sur $[-4\,;3[$, $f(x) = \dfrac{1}{5}(x+3)(x-1)(x-3)$

2. Vérifier (ou admettez) que sur $[-4;3[$, $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{9}{5}$, puis calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f'(x)$.

On sait que $f(x) = \frac{1}{5}(x+3)(x-1)(x-3) = \frac{1}{5}(x^2-9)(x-1)$

Dérivée d'un produit : $f'(x) = \frac{1}{5}\left(2x \times (x-1) + (x^2-9) \times 1\right)$

$= \frac{1}{5}\left(3x^2 - 2x - 9\right)$

On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f'(x) = \frac{3}{5} \times 3^2 - \frac{2}{5} \times 3 - \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$

### Partie B – Parabole

Une parabole est la courbe représentative d'une fonction du second degré. Donc l'expression de la fonction $f$ sur $[3;50]$ est $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a$, $b$ et $c$ réels ($a \neq 0$).

1. Sachant que la courbe représentative de $f$ passe par D, exprimer $c$ en fonction de $a$ et $b$.

Il faut que $f(3) = 0$, donc $a \times 3^2 + b \times 3 + c = 0$

$c = -9a - 3b$

2. Sachant que $f$ est dérivable en 3, exprimer $b$ en fonction de $a$.

sur $[3;50]$, $f'(x) = 2ax + b$.

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f'(x) = \frac{12}{5}$

Il faut donc que $f'(3) = \frac{12}{5} = 2a \times 3 + b$

$b = \frac{12}{5} - 6a$.

**3.** À l'aide des questions précédentes, déterminer l'expression de $f$ sur $[3;50]$.

On sait que $\left\{\begin{array}{r} c=-9a-3b \\ b=\dfrac{12}{5}-6a \\ f(9)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} c=-9a-3b \\ b=\dfrac{12}{5}-6a \\ 81a+9b+c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{r} c=-9a-3b \\ b=\dfrac{12}{5}-6a \\ 81a+\dfrac{105}{5}-54a-9a-\dfrac{36}{5}+18a=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} c=-9a-3b \\ b=\dfrac{12}{5}-6a \\ 36a+\dfrac{72}{5}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l} c=-\dfrac{54}{5} \\ b=\dfrac{24}{5} \\ a=-\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$

D'où $f(x)=-\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{24}{5}x-\dfrac{54}{5}$ sur $[3;50]$.