

correction			
CHR	1.1.a période → borne		1
REP	1.1.b : motif (valeurs et tangentes)		2
ANT	construire symétrique		1
ANT	construire période		2
	total		6
CAL	2.1 démontrer période		1,5
CAL	démontrer parité		1
FCTo7	2.2 dérivée fct trigo		1
FCTo5	dérivée u^n		1
FCTo5	dérivée $f(ax+b)$		1
CAL	dérivée de f		1
CAL	2.3 factorisation dérivée		1
FCTo6	signe sinus		1
ANT	Signe équation 2nde degré		2,5
FCTo6	valeur cosinus		1
ANT	tableau variation (signe + var)		1
FCTo6	$\sin^2 + \cos^2$		1
CAL	valeurs exactes		1
	total		15

Exercice 1 — Propriétés des fonctions

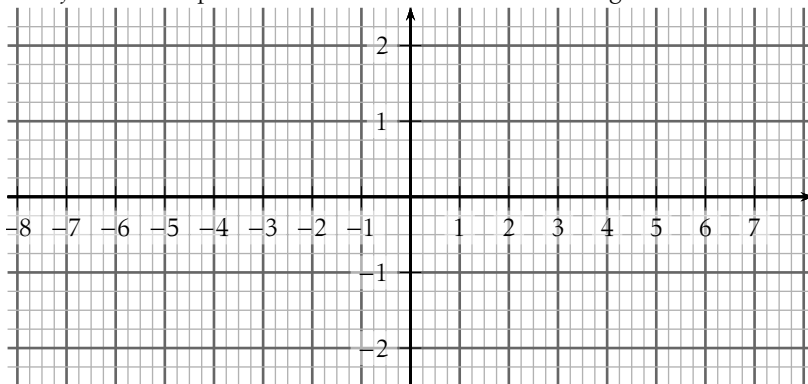
6 points

La fonction f est de période 4 et est paire.

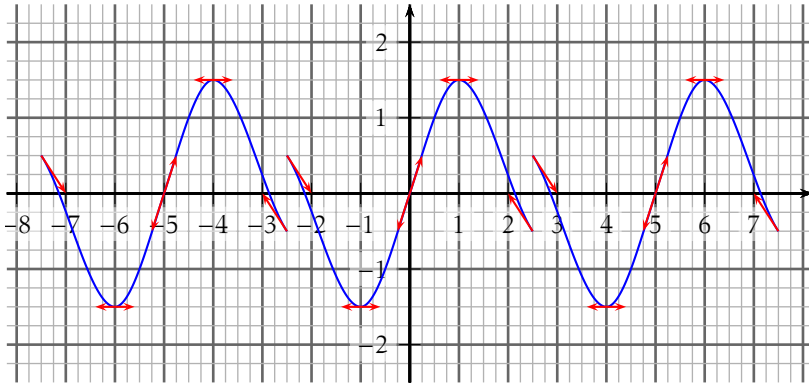
1. Écrire la borne manquante dans le tableau de variations suivant

x	0	1			
signe de $f'(x)$	2	+	0	-	-1
variations de f	$1,5$ $\nearrow$ $\searrow$ 0 -0,5				

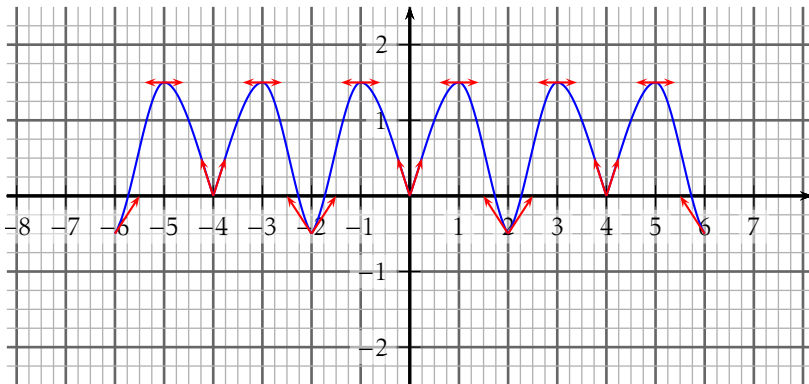
2. Donner une représentation graphique sur au moins trois périodes de la fonction f dans le repère ci-dessous sans oublier les tangentes à la courbe !



pour une fonction impaire de période 5 :



pour une fonction paire de période 4 :



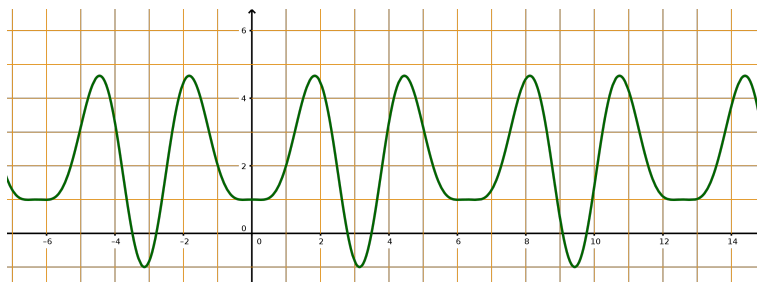
Exercice 2 — Une fonction trigonométrique

15 points

Votre professeur préféré vous demande d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(3x) + 3\sqrt{2}(\sin(x))^2$.

☐ prudent ; ☐ inquiet ; ☐ suspicieux (cocher la (les) bonne(s) case(s)) vous décidez d'utiliser une approche informatique...

Vous définissez donc la fonction dans GeoGebra et vous obtenez le graphe :



1. Démontrer la parité et la périodicité de f .

En déduire $\mathcal{D}$ votre intervalle de travail.

périodicité On remarque que si $x \in \mathbb{R}$ alors $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$

On calcule $f(x + 2\pi)$

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \cos(3(x + 2\pi)) + 3\sqrt{2}(\sin(x + 2\pi))^2 \\ &= \cos(3x + 6\pi) + 3\sqrt{2}(\sin(x + 2\pi))^2 \end{aligned}$$

Or les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π -périodiques, donc

$$f(x + 2\pi) = \cos(3x) + 3\sqrt{2}(\sin(x))^2 = f(x)$$

La fonction f est donc 2π périodique : on peut restreindre son étude à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

parité On remarque que si $x \in \mathbb{R}$ alors $(-x) \in \mathbb{R}$

On calcule $f(-x)$

$$f(-x) = \cos(-3x) + 3\sqrt{2}(\sin(-x))^2$$

or pour tout α , $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ et $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$$\text{donc } f(-x) = \cos(3x) + 3\sqrt{2}(-\sin(x))^2 = f(x)$$

la fonction f est paire : on peut restreindre son étude à $[0; \pi]$

2. Vous obtenez la dérivée de f grâce au module *Calcul formel* de GeoGebra. Plein de bonne volonté, vous décidez de présenter le détail du calcul sur votre copie MAIS sans chercher à simplifier l'expression obtenue qui contient un terme de la forme $t(3x)$ (où t est la fonction $\cos$ ou $\sin$).

$$f(x) = \cos(3x) + 3\sqrt{2}(\sin(x))^2$$

la dérivée de $f(ax + b)$ est $af'(ax + b)$

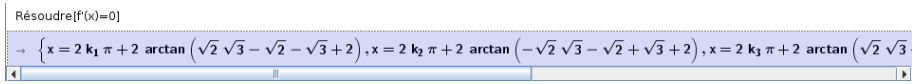
la dérivée de u^2 est $2u'u$

la dérivée de $\cos$ est $-\sin$ et celle de $\sin$ est $\cos$

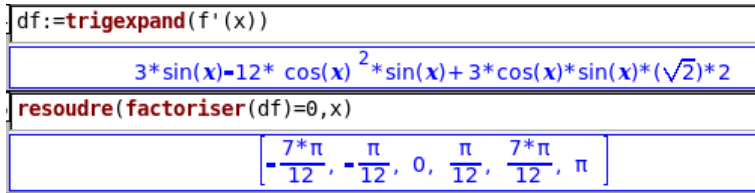
$$\text{donc } f'(x) = -3\sin(3x) + 3\sqrt{2} \times 2\cos(x)\sin(x)$$

Le travail de recherche de signe semble compliqué...

Vous pensez obtenir les éventuelles valeurs qui annulent f' à l'aide de GeoGebra :



Avec raison, vous pensez que cette réponse ne plaira pas à votre professeur. Vous obtenez une autre expression de la dérivée grâce à Xcas :



c'est à dire $f'(x) = 3 \sin(x) - 12 \cos^2(x) \sin(x) + 3 \cos(x) \sin(x) \sqrt{2} \times 2$

3. À l'aide de cette expression de f' (que vous admettez), et de la deuxième ligne de réponse :

- étudiez le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$;
- dresser le tableau de variations de f ;
- puis le compléter en détaillant le calcul des images.

$$f'(x) = 3 \sin(x) - 12 \cos^2(x) \sin(x) + 3 \cos(x) \sin(x) \sqrt{2} \times 2$$

$$f'(x) = 3 \sin(x) (1 - 4 \cos^2(x) + 2\sqrt{2} \cos(x))$$

Or pour tout $x \in [0; \pi]$, $\sin(x) \geq 0$.

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $(-4 \cos^2(x) + 2\sqrt{2} \cos(x) + 1)$, qui est un polynôme du second degré en $\cos(x)$.

Le coefficient de $\cos^2(x)$ étant négatif, le polynôme sera négatif à l'extérieur des racines.

$$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times (-4) \times 1 = 24$$

donc le polynôme admet deux racines :

$$\cos(x) = \frac{-2\sqrt{2} - \sqrt{24}}{2 \times (-4)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ et } \cos(x) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

À l'aide de la deuxième ligne de réponse, on en déduit que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$,

car $\frac{\pi}{12} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, donc son cosinus est positif ;

et $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, car $\frac{7\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, donc son cosinus est négatif.

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	π			
signe de $f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
variations de f	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
		$\frac{8\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{4}$		$\frac{8\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{4}$		-1	

pour calculer les valeurs exactes :

on sait que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{16} = \frac{8 + 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{16} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

or on sait que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

on en déduit que $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

donc $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(3 \times \frac{\pi}{12}\right) + 3\sqrt{2} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{6\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{4} = \frac{8\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{4}$

On remarque $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$,

donc $\sin \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$, d'où $\sin^2 \frac{7\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$

donc $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(3 \times \frac{7\pi}{12}\right) + 3\sqrt{2} \times \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4} = \frac{8\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{4}$

En corrigeant vos copies, je découvre que certaines calculatrices donnent la valeur exacte de $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$!!