

|                   |                                         |           |
|-------------------|-----------------------------------------|-----------|
| <b>correction</b> |                                         | <b>23</b> |
| <b>CPXo1</b>      | 1.1.a calcul expression conj            | 0,5       |
| <b>CPXo1</b>      | 1.1.b reconnaître $i\hat{4}$            | 1         |
| <b>CPXo1</b>      | 1.1.c formules conj. Correctes          | 1         |
| <b>CAL</b>        | 1.1 calculs corrects                    | 2         |
| <b>CPXo1</b>      | 1.1 identifier Re et Im                 | 1         |
| <b>CPXo1</b>      | 1.2.a calculer $j\hat{2}$               | 1,5       |
| <b>CAL</b>        | 1.2.b calculer somme                    | 1         |
|                   | <b>total</b>                            | <b>8</b>  |
| <b>CAL</b>        | 2.1.a calculer $P(1)$                   | 0,5       |
| <b>RAI</b>        | 2.1.b identifier coeffs : méthode       | 1         |
| <b>CAL</b>        | identifier coeffs : calculs             | 1,5       |
| <b>CPXo2</b>      | 2.1.c résoudre eq. Deg 2 dans C         | 2         |
| <b>CPXo3</b>      | 2.2.a placer points                     | 1,5       |
| <b>CPXo1</b>      | 2.2.b calculer modules                  | 2         |
| <b>ANT</b>        | nature triangle                         | 0,5       |
|                   | <b>total</b>                            | <b>9</b>  |
| <b>CAL</b>        | 3.1 Calculs à l'aide de la calculatrice | 2         |
| <b>CHR</b>        | 3.2 conjecture                          | 1         |
| <b>SUIo1</b>      | Dem récurrence : identifier étapes      | 1         |
| <b>SUIo1</b>      | Dem récurrence : rédaction              | 1,5       |
| <b>CAL</b>        | Dem récurrence : calculs                | 0,5       |
|                   | <b>total</b>                            | <b>6</b>  |

**Exercice 1 — Quelques calculs**

8 points

Dans cet exercice, vous détaillerez raisonnablement les calculs.

1. Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants ( $m$  est le n° de votre mois de naissance) :

a)  $z_a = \frac{3+i}{m-2i}$     b)  $z_b = i^{2016}$     c)  $z_c = \overline{(m+2)i \times \overline{2+3i}}$

a)  $z_a = \frac{3+i}{m-2i} = \frac{(3+i)(m+2i)}{m^2+4}$   
 $= \frac{3m+6i+im+2i^2}{m^2+4}$

$= \frac{3m-2}{m^2+4} + \frac{6+m}{m^2+4}i$

donc  $\Re(z_a) = \frac{3m-2}{m^2+4}$  et  $\Im(z_a) = \frac{6+m}{m^2+4}i$

b)  $z_b = i^{2016} = i^{4 \times 504} = (i^4)^{504} = 1^{504} = 1$   
 donc  $\Re(z_b) = 1$  et  $\Im(z_b) = 0$

c)  $z_c = \overline{(m+2)i \times \overline{2+3i}}$   
 $= \overline{(m+2)i \times \overline{2+3i}}$

$= -(m+2)i \times (2+3i)$

$= -2(m+2)i - 3(m+2)i^2$

$= -2(m+2)i + 3(m+2)$

donc  $\Re(z_c) = 3(m+2)$  et  $\Im(z_c) = -2(m+2)$

2. Soit  $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

- a) Calculer  $j^2$ .

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = \frac{-2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- b) Calculer  $S = 1 + j + j^2$ .

$$S = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

## Exercice 2 — Polynôme et géométrie

9 points

Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose :  $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1. a) Calculer  $P(-1)$ .

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 7 = -1 - 3 - 3 + 7 = 0$$

- b) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que  $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz + z^2 + az + b = z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b$$

en identifiant les coefficients :  $a = -4$  et  $b = 7$

$$\text{donc } P(z) = (z+1)(z^2 - 4z + 7)$$

- c) En déduire les solutions de l'équation  $P(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0$$

$$\text{donc } z = -1 \text{ ou } z^2 - 4z + 7 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 16 - 28 = -12$$

l'équation admet deux racines complexes conjuguées :

$$\alpha = \frac{-(-4) + i\sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3}i \text{ et } \beta = 2 - \sqrt{3}i$$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soient les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = \alpha$ ,  $z_B = \beta$  et  $z_C = \gamma$  où  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont les racines du polynôme  $P$ .

- a) Placer les points A, B et C dans un repère (unité 1 grand carreau ou 1 cm).

- b) Calculer les distances AB, BC et CA. En déduire la nature du triangle ABC.

$$AB = |z_B - z_A| = |2 + \sqrt{3}i - (-1)| = |3 + \sqrt{3}i| = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$$

$$BC = |z_C - z_B| = |2 - \sqrt{3}i - (2 + \sqrt{3}i)| = |-2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$CA = |z_A - z_C| = |-1 - (2 - \sqrt{3}i)| = |-3 + \sqrt{3}i| = 2\sqrt{3}$$

le triangle ABC est équilatéral.

### Exercice 3 — Complexes et suites

6 points

Dans le plan complexe, on définit la suite suivante :

$$\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = (-1 + \sqrt{3}i)z_n \end{cases}$$

1. À l'aide de la calculatrice, donner la forme algébrique de  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  et  $z_4$  ; puis, toujours à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant.

|            | $z_0$ | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| forme alg. | 1     |       |       |       |       |
| module     |       |       |       |       |       |

|            | $z_0$ | $z_1$            | $z_2$             | $z_3$ | $z_4$             |
|------------|-------|------------------|-------------------|-------|-------------------|
| forme alg. | 1     | $-1 + \sqrt{3}i$ | $-2 - 2\sqrt{3}i$ | 8     | $-8 + 8\sqrt{3}i$ |
| module     | 1     | 2                | 4                 | 8     | 16                |

2. Émettre une conjecture permettant d'obtenir  $|z_n|$  en fonction de  $n$ , puis la démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence en précisant les propriétés utilisées sur les modules des nombres complexes.

**Conjecture :** on a l'impression que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z_n| = 2^n$

**Initialisation :**  $|z_0| = |1| = 1$  et  $2^0 = 1$ , donc la propriété «  $|z_n| = 2^n$  » est vraie pour  $n = 0$

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un entier  $p$  tel que la propriété «  $|z_p| = 2^p$  » soit vraie, montrons qu'alors au rang  $(p + 1)$ , la propriété «  $|z_{p+1}| = 2^{p+1}$  » est vraie.

**Démonstration :** On sait que  $z_{p+1} = (-1 + \sqrt{3}i)z_p$ , donc

$$|z_{p+1}| = |(-1 + \sqrt{3}i)z_p| = |-1 + \sqrt{3}i| \times |z_p|, \text{ car } |zz'| = |z| \times |z'|$$

$$\text{or } |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

et par hypothèse de récurrence  $|z_p| = 2^p$

$$\text{donc } |z_{p+1}| = 2 \times 2^p = 2^{p+1}$$

**Conclusion :** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|z_n| = 2^n$ .