

		bilan des compétences	12
CAL	12	Calculer : Effectuer un calcul...	9
REP	6	Représenter : Choisir un cadre...	3
		bilan des connaissances	12
FCTo4	1	Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires da...	1
FCTo5	1	Calculer la dérivée d'une fonction composée $\sqrt{u}$...	1
FCT10	2	Exponentielle / Logarithmes : calculs...	2
FCT12	1	Logarithme : limite et formes indéterminées...	1
GEOo1	2	Etudier la position relative de deux plans, d'une ...	1,5
GEOo2	2	Donner différentes équations d'un plan (cartésienn...	2,5
GEOo3	1	Calculer un produit scalaire...	0,5
GEOo4	2	Donner les coordonnées d'un vecteur (calcul, vecte...	2,5

correction		
FCT10	1.A.1 équation avec log	1
FCT12	1.A.2 limite $\ln$ en $-\infty$	1
FCT05	1.A.2 dérivée de $\ln(u)$	1
CAL	dérivée de f	1
CAL	signe de $f'(x)$	0,5
FCT04	1.A.3 démontrer inégalité : fct croissante	1
CAL	démontrer inégalité : calc images	0,5
REP	1.B variation : expression de la différence	0,5
FCT10	variation : justification du signe de $\ln$	1
REP	variation : conclusion	0,5
total		8
GEO04	2.1.a vect. ortho : coordonnées des points	1,5
GEO04	vect. Ortho : coordonnées des vecteurs	1
GEO03	vect. Ortho : expression produit scalaire	0,5
CAL	vect. Ortho : justesse des calculs	1
REP	vect. Ortho : méthode	0,5
GEO02	2.1.b eq plan : méthode (vect. Normal / systeme...)	1
CAL	justesse des calculs	1
GEO02	2.2 droite : expression paramétrique	1,5
GEO01	2.3 intersection plan-droite : mise équation	0,5
CAL	intersection plan-droite : résoudre équation	0,5
CAL	intersection plan-droite : coordonnées M	0,5
REP	2.4 nature triangle : méthode	0,5
CAL	nature triangle : justesse des calculs	1
REP	nature du triangle	0,5
CAL	aire	0,5
CAL	2.5 volume tétraèdre : formule	0,5
CAL	volume tétraèdre : justesse des calculs	1
GEO01	2.6 droites sécantes : méthode	1
CAL	droites sécantes : justesse des calculs	1
REP	droites sécantes : conclusion	0,5
total		16

Co7

24 points possibles, mais note sur 20 (vous pouvez ne pas tout faire et avoir 20 !)

D'après les sujets de l'A.P.M.E.P.

Exercice 1 — Fonction logarithme

8 points

d'après Métropole, juin 2016

Partie A –

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

$$\begin{array}{l|l} f(x) = x & \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x & \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \\ & \Leftrightarrow x = 0 \end{array}$$

2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	+
variations de f	$-\infty$ $+\infty$ 		

Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$$

$$\text{d'où } -\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Dérivée de f

la dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$.

ici $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$

$$\text{donc } f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} =$$

$$\frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$ et s'annule pour $x = 1$.

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0;1]$, $f(x)$ appartient à $[0;1]$.

Pour tout $x \in [0;1]$ on a $0 \leq x \leq 1$;	$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$
comme f est strictement croissante	$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 - \ln(2) < 1$
sur $\mathbb{R}$, on a :	donc $x \in [0;1] \Rightarrow f(x) \in [0;1]$.

Partie B –

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$$

Étudier les variations de la suite (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = u_n - \ln(u_n^2 + 1) - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$$

or $u_n^2 + 1 > 1$, donc $\ln(u_n^2 + 1) > \ln(1)$

comme $\ln(1) = 0$, on en déduit que $\ln(u_n^2 + 1) > 0$

et donc $u_{n+1} - u_n < 0$

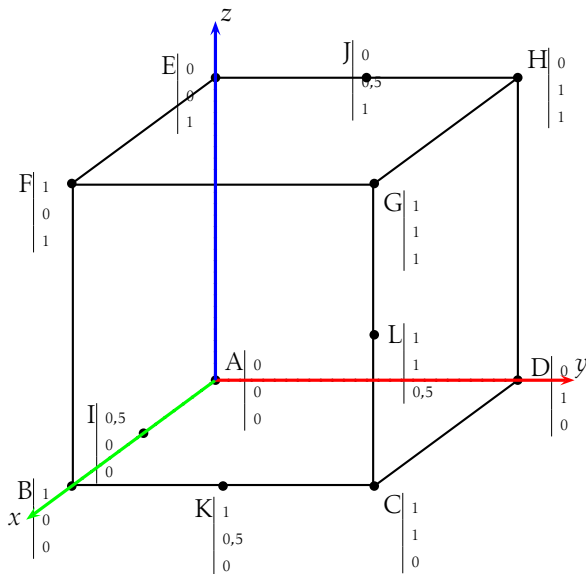
la suite (u_n) est donc décroissante.

Exercice 2 — Espace

16 points

d'après Liban, mai 2015

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.

Remarque : on pourra lire les coordonnées des points sur la figure, sans les calculer.

1. a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

(FD) est orthogonale au plan (IJK) si elle est au moins orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Montrons que $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{IK}$.

$$\overrightarrow{FD} = \begin{pmatrix} x_D - x_F \\ y_D - y_F \\ z_D - z_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} x_K - x_I \\ y_K - y_I \\ z_K - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IJ} = -1 \times \frac{-1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IK} = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times 0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

le vecteur $\overrightarrow{FD}$ est orthogonal au plan (IJK), donc la droite (FD) l'est aussi.

- b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

on sait qu'une équation cartésienne d'un plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c)$ les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

On en déduit qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $-x + y - z + d = 0$.

Les coordonnées du point I doivent vérifier l'équation : $-\frac{1}{2} + 0 + 0 + d = 0$
on en déduit que $d = \frac{1}{2}$.

L'équation du plan (IJK) est donc :

$$-x + y - z + 0,5 = 0.$$

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

$$(FD) = \begin{cases} x = x_F + \lambda(x_D - x_F) \\ y = y_F + \lambda(y_D - y_F) \\ z = z_F + \lambda(z_D - z_F) \end{cases} \text{ avec } (\lambda \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \text{ avec } (\lambda \in \mathbb{R})$$

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

Les coordonnées de M doivent vérifier les équations de (FD) et de (IJK) :

$$-x_M + y_M - z_M + 0,5 = 0$$

$$-(1 - \lambda) + \lambda - (1 - \lambda) + 0,5 = 0$$

$$-2 + 3\lambda + 0,5 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } M = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

$$IJ^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{3}{2}$$

$$IK^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{2}$$

$$KJ^2 = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$$

donc $IJ^2 + IK^2 = KJ^2$, le triangle IJK est rectangle en I.

$$\text{donc son aire est } \frac{1}{2} \times IJ \times IK = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

$$\text{volume du tétraèdre} = \frac{1}{3} \times \text{base} \times \text{hauteur}.$$

Ici la base est le triangle IJK et la hauteur est [FM], donc

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3 \times 4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}$$

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Pour que les droites soient sécantes, il faut que les points I, J, K et L soient coplanaires.

Les coordonnées des points du plan (IJK) doivent vérifier : $-x + y - z + 0,5 = 0$;

les coordonnées de L sont $\left(1; 1; \frac{1}{2}\right)$

donc $L \in (IJK)$.

On sait que $\overrightarrow{IJ} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$,

d'après la figure $\overrightarrow{KL} = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$,

les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont donc pas colinéaires :

les droites (IJ) et (KL) sont sécantes.