		bilan des connaissances
ANT	2	connaissances des années antérieures...
FCT01	1	Donner la limite d'une fonction en utilisant les o...
INT01	4	Utiliser une intégrale pour calculer / encadrer un...
INT02	3	Connaître les primitives des fonctions usuelles...
INT04	5	Calcul d'une intégrale, d'une valeur moyenne...

correction			
INT04	1. Calcul intégrale (calculatrice)	0,25	1
INT04	2. calcul intégrale (calculatrice possible)	0,25	1
INT04	3. calcul valeur moyenne (calculatrice possible)	0,25	1
	bonus bonnes réponses		1
INT01	4. calcul intégrale fonction impaire	0,25	1
FCT01	5. inégalités log	0,25	1
INT01	6. minorer intégrale	0,25	1
INT04	7. calcul valeur moyenne	0,25	1
INT04	8. relation de Chasles	0,25	1
	bonus bonnes réponses		1
ANT	9. dérivée d'un quotient + signe	0,25	1
ANT	10. dériver pour reconnaître primitive	0,25	1
INT01	11. intégrale = aire sous la courbe si f >0	0,25	1
	bonus bonnes réponses		1
INT02	12. limite d'une fonction définie par intégrale	0,25	1
INT02	13. limite d'une fonction définie par intégrale	0,25	1
INT01	14. encadrement d'une intégrale	0,25	1
	bonus bonnes réponses		1
INT02	15. calcul d'un volume	0,25	1

C08

NOM .... - Calculatrice autorisée

Cet contrôle est un questionnaire à choix multiples (Q.C.M.).
Pour chaque question, il n'y a qu'une seule bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée.
Une bonne réponse rapporte 1 *point, une mauvaise enlève* 0,25 *point, une absence de réponse n'enlève, ni n'apporte de de point.*
Si toutes les réponses à un exercice sont correctes, cela ajoute 1 *point.*
Si le total des points du contrôle est négatif, il est ramené à 0.

Exercice 1 —

d'après Puissance 11, mai 2015. Dans cette partie, les calculs pouvaient être effectués à l'aide de la calculatrice.

1. Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

a) $\mathrm{I} = 2$ **b)** $\mathrm{I} = -2$ ☐ 1

$\mathrm{I} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x^2)\right]_1^{\mathrm{e}} = 2$
Ce calcul pouvait être effectué à la calculatrice.

2. Si $a \geqslant 0$, alors $\mathrm{J}_a = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x+a}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2 + \frac{2}{3}a$

a) faux **b)** vrai ☐ 2

$\mathrm{J}_a = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x+a}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \frac{a}{x^2}\,\mathrm{d}x$
$= \left[\ln(x^2)\right]_1^{\mathrm{e}} + \left[-\dfrac{a}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = 2 - 0 - \dfrac{a}{\mathrm{e}} + a$
On pouvait éventuellement tester $a = 3$ (ou un multiple de 3) à l'aide de la calculatrice on trouve $\mathrm{J}_3 \approx 3{,}89$ et $2 + \dfrac{2}{3} \times 3 = 4$

3. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$, alors la valeur moyenne de f sur $[2\,;5]$ est

a) $\ln(2{,}5)$ **b)** $\dfrac{1}{3}\ln(3)$ **c)** $\dfrac{1}{3}\ln(2{,}5)$ **d)** $\ln(3)$ $\square$ 3

$$\mu = \frac{1}{5-2}\int_2^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
On pouvait aussi utiliser la calculatrice pour trouver la bonne réponse.

Exercice 2 —

Dans cette partie, même si la calculatrice donne des pistes, il faut réfléchir !

1. Quelque soit $n \in \mathbb{Z}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} n \times \cos(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$

a) $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}\cos(nx)\,\mathrm{d}x$ **b)** $\mathrm{I}_n = 0$ **c)** $\mathrm{I}_n = \pi$ $\square$ 4

$f(x) = n \times \cos(x)\sin(nx)$
$f(-x) = n \times \cos(-x)\sin(n(-x)) = -n \times \cos(x)\sin(nx) = -f(x)$
La fonction est impaire, l'intégrale sur un domaine symétrique par rapport à 0 est nulle ; donc $\mathrm{I}_n = 0$.
À l'aide de la calculatrice, on pouvait tester le calcul pour quelques valeurs de n, mais le doute subsiste...

2. L'inéquation $x\ln x > x$ a pour solution :

a) $x \in]0\,;\mathrm{e}[$ **b)** $x < 0$ **c)** $x > \mathrm{e}$ **d)** $x \in]1\,;\mathrm{e}[$ $\square$ 5

Pour préparer la question suivante avec l'idée de comparer les intégrales.

3. Quelque soit $a > \mathrm{e}$, $\mathrm{J}_a = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{a} x\ln(x)\,\mathrm{d}x$

a) $\mathrm{J}_a > \dfrac{a^2-\mathrm{e}^2}{2}$ **b)** $\mathrm{J}_a > \dfrac{(a-\mathrm{e})^2}{2}$ **c)** $\mathrm{J}_a < \dfrac{\mathrm{e}^2-a^2}{2}$ $\square$ 6

$x > \mathrm{e} \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Rightarrow x\ln(x) > x$

donc $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{a} x\ln(x)\,\mathrm{d}x > \int_{\mathrm{e}}^{a} x\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{J}_a > \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\mathrm{e}}^{a} \Leftrightarrow \mathrm{J}_a > \frac{a^2-\mathrm{e}^2}{2}$

À l'aide de la calculatrice, on pouvait tester le calcul pour quelques valeurs de a, mais le doute subsiste…

4. Soit $a > 0$, la fonction f_a est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = \dfrac{a\sin x}{2+\cos x}$, on appelle μ sa valeur moyenne sur $[0\,;\pi]$.

a) il existe une valeur de a telle que $\mu = 0$

b) on a toujours $\mu = \pi$ ☐ 7

c) il existe une valeur de a telle que $\mu = \ln 3$

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} a\frac{\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{\pi}\Big[\ln(2+\cos x)\Big]_0^{\pi} = -\frac{a}{\pi}\times(-\ln 3) = \frac{a\ln 3}{\pi}$$

La calculatrice permet de conjecturer, mais pas de démontrer.

5. On donne $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 15$ et $\displaystyle\int_5^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 15$ donc

a) $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 30$ **b)** $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ☐ 8

c) on n'a pas assez de données pour calculer $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 15 - \int_5^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 15 - 15 = 0$$

Exercice 3 —

d'après Puissance 11, mai 2014

On définit sur $]0\,;+\infty[$ les fonctions f, F et G par

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}\,;\quad \mathrm{F}(x) = \frac{\ln x}{2} + \frac{\ln(x+2)}{2}\,;\quad \text{et } \mathrm{G}(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+2x)+1\right)$$

1. sur son intervalle de définition, la fonction f est

a) décroissante et change de signe

b) strictement positive et non monotone

c) décroissante et strictement positive

d) croissante et strictement positive

9

sur $]0\,;+\infty[$ on a $x+1>0$ et $x^2+2x>0$, donc la fonction est strictement positive.
$f'(x) = \dfrac{1\times(x^2+2x)-(x+1)\times(2x+2)}{(x^2+2x)^2} = \dfrac{-(x^2+2x+2)}{(x^2+2x)^2}$
donc $f'(x)<0$

2.

a) les deux fonctions F et G sont les primitives d'une même fonction autre que f

b) une seule des fonctions F ou G est une primitive de f

c) les deux fonctions F et G sont des primitives de f

10

Il suffit de dériver les fonctions proposées...

3. pour tout $a>0$, $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine défini par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=1$

a) faux **b)** vrai

11

Si $a>1$, alors $\displaystyle\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^a -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_1^a f(x)\,\mathrm{d}x$ or $f(x)\geqslant 0$ si $1\leqslant x\leqslant a$

Exercice 4 —

1. Pour tout $a>1$, on définit la fonction F_a sur $]0\,;+\infty[$ par $\mathrm{F}_a(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_a(x) = +\infty$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_a(x) = \ln(a)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_a(x) = \frac{\ln(a)}{x}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}_a(x) = \frac{1}{a}$

12

$$F_a(x) = \int_a^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(x)\Big]_a^x = \ln(x) - \ln(a)$$

2. Pour tout $a > 1$, on définit la fonction G_a sur $]0\,;+\infty[$ par $G_a(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G_a(x) = \ln(a)$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G_a(x) = \frac{\ln(a)}{a}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G_a(x) = +\infty$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G_a(x) = \frac{1}{a}$

13

$$G_a(x) = \int_a^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{a}$$

3. Pour tout $a > 1$, on définit la fonction H_a sur $]0\,;+\infty[$ par $H_a(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et on admet que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$ on a $\dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x\sqrt{x}} < \dfrac{1}{x}$.
À l'aide des réponses précédentes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H_a(x) = \frac{1}{a}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{a}}$

c) on ne peut pas trouver $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H_a(x)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H_a(x) = \ln(a)$

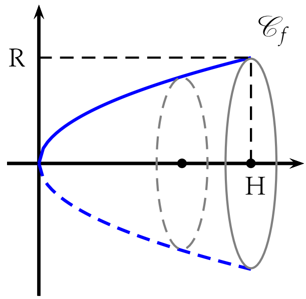
14

L'encadrement ne permet pas de trouver la limite (d'après les réponses précédentes, les fonctions F_a et G_a n'ont pas la même limite en $+\infty$

Exercice 5 —

On admet que le volume d'un objet dont la forme est obtenu par la rotation de la courbe d'une fonction f continue et définie sur $[a\,;b]$ autour de l'axe des abscisses, est donné par : $V = \displaystyle\int_a^b \pi\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x$.

Dans le cas où la fonction f est définie par $f(x) = \mathrm{R} \times \sqrt{\dfrac{x}{\mathrm{H}}}$ sur l'intervalle $[0\,;\mathrm{H}]$, le volume engendré est un bol paraboloïde de hauteur H et de rayon R. Le schéma illustre ce cas.



Dans ce cas, le volume (en unités de volume) du bol est :

a) $\dfrac{\pi \mathrm{R}^4}{2\mathrm{H}}$ **b)** $\dfrac{1}{2}\pi \mathrm{R}^2 \mathrm{H}$ **c)** $\dfrac{1}{3}\pi \mathrm{R}^2 \times \mathrm{H}$ **d)** $\dfrac{4}{3}\pi \mathrm{R}^2 \times \mathrm{H}$ $\square$ 15