ᔕ Démonstrations en TS ᔓ

1. Suites

1.1 Limite d'une suite croissante non majorée

Une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

La suite (u_n) n'est pas majorée, donc pour tout réel A,............................

....

La suite (u_n) est croissante, donc..

....

Donc la suite diverge vers $+\infty$

1.2 Limite d'une suite croissante majorée

Si une suite est croissante et admet pour limite ℓ, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ.

Démonstration par l'absurde :
Supposons qu'il existe un rang n_0 tel

que. . . . .
or (u_n) est croissante, donc pour tout

$n > n_0$, ...
Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe un

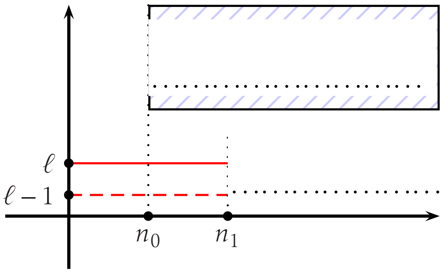
entier n_1 tel que pour tout $n > n_1$, ...

. . . .
Soit $\mathrm{N} = \max(n_0, n_1)$, on doit donc avoir pour tout $n > \mathrm{N}$:

- . . . .

- . . . .

ce qui est impossible, donc il *n'existe pas* de rang n_0 à partir duquel $u_{n_0} > \ell$.



1.3 Limite d'une suite géométrique

$\boxed{\text{Si } q > 1, \text{ alors } \lim\limits_{x \to +\infty} q^n = +\infty}$

Hypothèse
On suppose connue l'inégalité de Bernoulli :

. . . . (peut être démontrée par récurrence).

Comme $q > 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $q =$. . . . . , donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$q^n =$. . . . .

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n\alpha = \ldots\ldots\ldots$ (car............), par comparaison des limites :

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \ldots\ldots\ldots$

1.4 Comparaison de limites de suites

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
- à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leqslant v_n$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, donc quelque soit $A > 0$,................................

....

....

En posant $M = \max(n_0, n_1)$, pour tout $n \geqslant M$ on a..............................

Comme A est un réel positif quelconque, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

2. Fonctions

2.1 Primitive : existence

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Hypothèses

- Si f est définie et continue sur $[a\,;b]$, alors f admet un minimum m sur $[a\,;b]$.

- Si f est une fonction continue *et positive* sur l'intervalle $[a;b]$, la fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et sa dérivée est la fonction f.
- La fonction F définie et dérivable sur $[a;b]$ telle que $\forall x \in [a;b], F'(x) = f(x)$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

On veut démontrer que si f est continue sur $[a;b]$ alors elle admet des primitives sur $[a;b]$

Soit la fonction g définie sur $[a;b]$ par $g(x) = f(x) - m$.

Pour tout $x \in [a;b]$, f est continue et. , donc g est. . . . .

. . . . sur $[a;b]$.

Donc il existe G. . . . . g sur $[a;b]$ et $G'(x) =$. . . . .

. . . .

On définit la fonction F sur $[a;b]$ par $F(x) = G(x) + mx$.

F est. . . . . sur $[a;b]$ et $F'(x) =$. . . . . ,
donc F est une primitive de f.

2.2 Fonction exponentielle : unicité

Il existe une unique fonction f, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' égale à f et telle que $f = f'$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle.

Démonstration de l'unicité

On suppose déjà démontré l'existence de la fonction exp définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$, $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$.

Supposons qu'il existe une fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On peut alors définir sur $\mathbb{R}$, la fonction $f = \dfrac{g}{\exp}$

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Donc f est une fonction$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, comme $f(0) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$ on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \dots$ d'où $g(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$
D'où l'unicité de la fonction exponentielle.

2.3 Fonction exponentielle : Limite en l'infini

La limite en $+\infty$ de la fonction exponentielle est $+\infty$.

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \exp(x) - x$.

Sa dérivée est donnée par $g'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Comme $x \geqslant 0$ et que la fonction exponentielle est$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, on a :

$\exp(x) \geqslant \exp(0) \Leftrightarrow \exp(x) \geqslant \dots \Leftrightarrow g'(x) \geqslant \dots$

On en déduit que g est$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

Comme $g(0) = \dots$, on a : $g(x) \geqslant \dots\dots\dots\dots$ Donc pour tout $x \geqslant 0$,$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots$

D'après les théorèmes de comparaison sur les limites, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ on en déduit que $\lim \exp(x) = +\infty$

3. Géométrie dans l'espace

3.1 Équation cartésienne d'un plan

L'équation du plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est :

$ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

On note $\mathrm{A}(x_0;y_0;z_0)$ un point de $\mathscr{P}$. Pour tout point $\mathrm{M}(x;y;z)$ de $\mathscr{P}$, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{n}$ sont............................, d'où.......................
....

Cette égalité se traduit à l'aide des coordonnées de vecteurs par :

....

d'où.. ce qui correspond à l'équation cartésienne proposée en notant $d =$......................
....

3.2 Théorème « du toit »

d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, avec d_1 incluse dans un $\mathscr{P}_1$ et d_2 incluse dans un plan $\mathscr{P}_2$.
Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants suivant une droite δ, alors les droites d_1 et d_2 sont parallèles à δ.

Si d_1 et d_2 sont parallèles alors elles ont un même vecteur directeur $\vec{d}$.

Soit $\vec{u_1}$ un vecteur de $\mathscr{P}_1$ non colinéaire à $\vec{d}$, $\left(\vec{d}\,;\vec{u_1}\right)$................................

.... ;

Soit $\vec{u_2}$ un vecteur de $\mathscr{P}_2$..

.... ;

Par hypothèse, $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$..., car alors les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ seraient parallèles.

Soit $\vec{\delta}$ un vecteur directeur de Δ.

- $\Delta \subset \mathscr{P}_1$, donc...

  ....

- $\Delta \subset \mathscr{P}_2$, donc...

  ......

par différence, on trouve :......................

comme les vecteurs ne sont pas colinéaires, on trouve....................., donc...

........., la droite δ est parallèle aux droites d_1 et d_2.

3.3 Droite orthogonale à un plan

> Si une droite $\mathscr{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite du plan $\mathscr{P}$.

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes de $\mathscr{P}$ de vecteur directeur respectif $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Soit $\vec{v}$ le vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Comme $\mathscr{D}$ est.................................. d_1 et d_2, on a............................

....

Toute droite Δ de $\mathscr{P}$ a pour vecteur directeur.......................................

....

On a : $\vec{v} \cdot \vec{u}$..

...

donc $\mathscr{D}$ est orthogonale à toute droite de $\mathscr{P}$.

4. Statistiques

4.1 Statistiques : intervalle de fluctuation asymptotique

Soit X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ et α un réel tel que $0<\alpha<1$.
Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, on appelle u_α l'unique réel tel que :

$$\mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$

On appelle I_n l'intervalle :

$$\mathrm{I}_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = 1-\alpha$

X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$; on pose $\mathrm{Z}_n = \dfrac{\mathrm{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$
d'après le théorème de Moivre-Laplace,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

Or si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$, on a

$$\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant b) = \mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b)$$

On remarque que $\alpha \in]0;1[\Leftrightarrow (1-\alpha) \in]0;1[$, donc $(1-\alpha)$ peut être la probabilité de l'événement $\mathrm{P}(a \leqslant \mathrm{X} \leqslant b)$.

Pour $a=-u_\alpha$ et $b=u_\alpha$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant u_\alpha) = \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{X} \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$$

Or

$$\begin{array}{ll}
 & -u_\alpha \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant u_\alpha \\
\Leftrightarrow & -u_\alpha \leqslant \dfrac{\mathrm{X}_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant u_\alpha \\
\Leftrightarrow & np - u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \leqslant \mathrm{X}_n \leqslant np + u_\alpha\sqrt{np(1-p)} \\
\Leftrightarrow & p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} \leqslant \dfrac{\mathrm{X}_n}{n} \leqslant p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}}{n} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\mathrm{X}_n}{n} \in \left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\mathrm{X}_n}{n} \in \mathrm{I}_n
\end{array}$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(-u_\alpha \leqslant \mathrm{Z}_n \leqslant u_\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}_n}{n} \in \mathrm{I}_n\right) = 1-\alpha$

4.2 Intervalle de confiance

Soit X_n une v.a. $\sim \mathscr{B}(n;p)$ avec $p \in]0;1[$. On pose $\mathrm{F}_n = \dfrac{\mathrm{X}_n}{n}$.
Pour n suffisamment grand, p appartient à l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 et f la fréquence observée sur du caractère étudié sur un échantillon de taille n.

L'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est une réalisation de $\left[\mathrm{F}_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; \mathrm{F}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
On a :
$\mathrm{P}\left(p \in \left[\mathrm{F}_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; \mathrm{F}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{F}_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant \mathrm{F}_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(-p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -\mathrm{F}_n \leqslant -p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) =$
$\mathrm{P}\left(p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \mathrm{F}_n \geqslant p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{F}_n \leqslant p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{F}_n \in \left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right)$

5. Probabilités

5.1 Loi normale

Soit X une v.a. $\sim \mathcal{N}(0;1)$. Pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1-\alpha$.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(t) = P(-t \leqslant X \leqslant t) = \displaystyle\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Variations de g Comme f est paire, on a. . . . .

Comme f est continue et dérivable, $g' = 2f$, comme $f > 0$,. . . . .

. . . .

Valeurs aux bornes

en 0 :. . . . .

en $+\infty$: f est une densité de probabilité, donc. . . . .

. . . .

. . . . ,

d'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 2 \times \lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$. . . . .

t	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de g	$\dots$ $\dots\dots$ $\dots$

Pour tout $\alpha \in]0;1[$ on a $(1-\alpha) \in]0;1[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g étant strictement

croissante de.................. dans............, il existe un unique $u_\alpha \in [0;+\infty[$ tel que $g(u_\alpha) = 1-\alpha$.

5.2 Loi exponentielle = loi sans vieillissement

> une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$

Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = \frac{P(\{X \geqslant t+h\} \cap \{X \geqslant t\})}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant h)}{P(X \geqslant t)}$$

$$P_{T \geqslant t}(T \geqslant t+h) = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots = P(X \geqslant h)$$

5.3 Espérance d'une loi exponentielle

L'espérance d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est donnée par : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Hypothèses

- L'espérance est donnée par : $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x) = \int_a^x t \times f(t)\,\mathrm{d}t$ (ici $a = 0$).
- Une fonction f continue sur l'intervalle $[0;x]$, admet sur cet intervalle des primitives.
- La dérivée de $t \mapsto -t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est $t \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda t} + t \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$

Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(t) = -t\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$;

on a $g'(t) =$..............................

donc $\lambda t\,\mathrm{e}^{-\lambda t} =$......................

$E(X) = \displaystyle\int_0^x t \times \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,dt$...

....

....

en passant par la limite quand x tend vers $+\infty$, on trouve $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

5.4 Indépendance de deux événements

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

hypthèses : on sait que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Les événements $A \cap B$ et $\overline{A} \cap B$ sont des événements..............................

. La réunion de ces deux événements est l'événement.......

On a alors : $P(B) = P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) =$. . . . .

. . . . car A et B sont indépendants.

On a donc $P(\overline{A} \cap B) =$. . . . .

. . . .

Donc les événements B et $\overline{A}$ sont indépendants.