Introduction

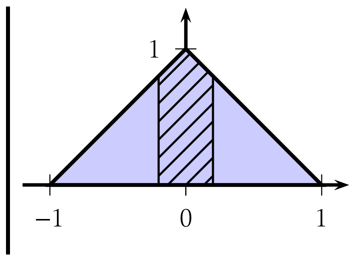
Jeu de fléchette : on lance une fléchette au hasard, mais on atteint toujours la cible ! On note X l'abscisse de la fléchette.

L'univers Ω associé à cette expérience est donc l'intervalle $[a\,;b]$ des abscisses possibles.

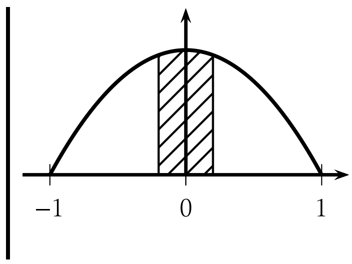
X est une..

....

- **Cible 1**
  triangle isocèle basé sur $[-1\,;1]$, et de sommet $(0\,;1)$.
  Calculer la probabilité $P(-0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}2)$.



- **Cible 2**
  arc de parabole basé sur $[-1\,;1]$. On veut que l'aire de la cible soit égale à 1
  - Donner l'expression de la fonction f.
  - Calculer la probabilité $P(-0{,}2 \leqslant X \leqslant 0{,}2)$.



- **Cible diverses** Trouver d'autres fonctions f positives et continues sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$

1. Variable aléatoire - Loi à densité

1.1 Loi à densité

Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction................................

....

On définit une loi de probabilité sur l'intervalle $[a;b]$ modélisant le choix d'un réel $x \in [c;d]$ avec $[c;d] \subset [a;b]$ en posant : $P(x \in [c;d]) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$.

f est...

....

1.2 Espérance

Soit X une variable aléatoire continue, à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$ et dont la densité associée est f.

L'espérance de X se calcule de la façon suivante :

....

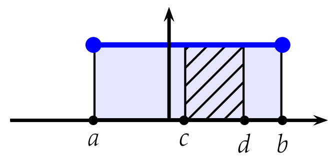
2. Loi uniforme

2.1 Définition et propriétés

2.1 exercices

p 414 n° 18 : loi uniforme / prob cond

p 414 n° 20 : loi uniforme / prob cond



La loi uniforme est la loi de probabilité définie sur l'intervalle........... par

....

Si X est une variable aléatoire continue suivant la loi uniforme sur $[a;b]$,

- si $\bar{I}$ est le complémentaire de I dans $[a;b]$, alors............................

  ...

- $P(X \in [c;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = P_{X \geqslant c}(X \leqslant d)$.................

2.2 Espérance

Par définition : $E(X) = \int_a^b t f(t)\,dt$

....

....

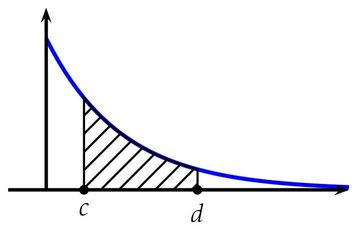
3. Loi exponentielle

3.1 Définition et propriété

Soit $\lambda > 0$, la loi exponentielle de .... est la loi de probabilité définie sur................. par

....

Si X est une variable aléatoire continue suivant la loi exponentielle de paramètre λ



- $P(X \in [c;d]) =$........................ $=$.......................... $= \int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,dt$
- pour tout réel $a > 0$, $P(X \geqslant a) = P(X > a) =$..............................
- pour tout réel $a > 0$, $P(X \leqslant a) = P(X < a) =$..................................

....

Durée de vie sans vieillissement : Sachant que X a déjà « vecu » t unités de temps, quelle est la probabilité que X « vive » encore h unités de temps ?

2.2 exercices

p 414 n° 19 : loi uniforme / espérance

3.1 exercices

p 414 n° 21 : loi expo / répartition / lecture graphique

p 414 n° 23 : loi expo / répartition / calcul

p 414 n° 25 : loi expo / sans vieillissement

3.2 Espérance

$E(X) =$ ....

4. Loi normale

4.1 Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite notée. . . . . est la loi de probabilité

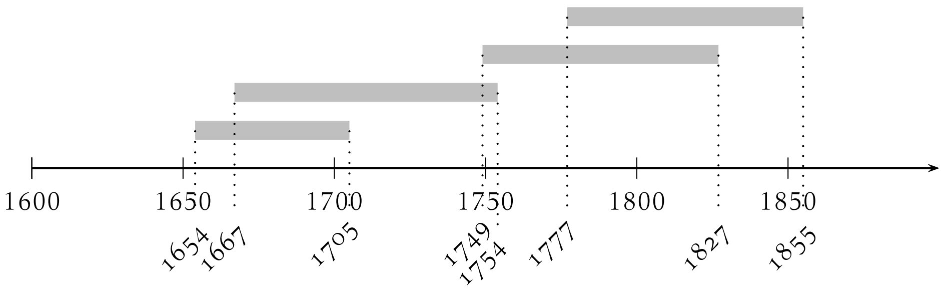
définie sur. . . . . . par :. . . . .

J. Bernoulli

A. de Moivre

P-S. de Laplace

C-F. Gauss



[1] Animation

GGB :

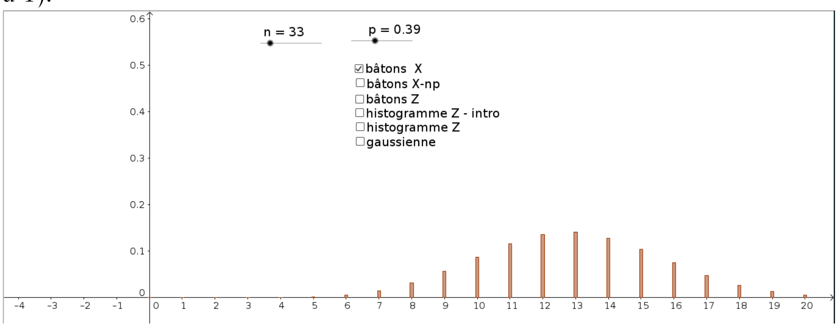
- loi binomiale : $X_n \sim \mathscr{B}(n;p)$ - diagramme en bâtons : la hauteur du bâton

  représente. . . . . (comme k est entier, les valeurs de X_n vont

  de. . . . .).

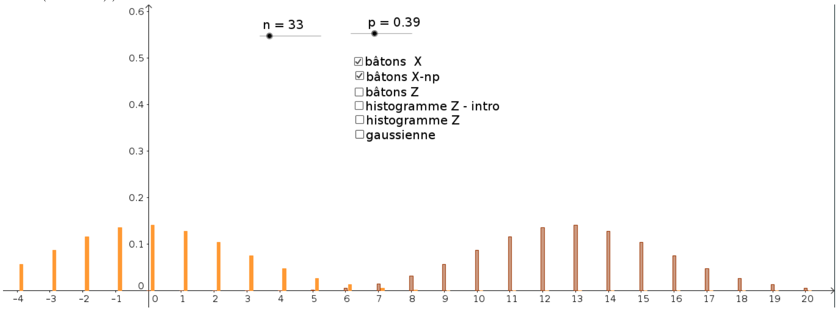
  on sait que μ =. . . . . et σ =. . . . .

  quand n augmente, l'étendue du graphique augmente et la hauteur de chaque bâton est réduite (la somme des probas doit toujours être égale à 1).



1– Jacques Bernoulli https://www.mathematik.ch
Abraham de Moivre http://web.calstatela.edu/curvebank/jabernoulli/jabernoulli.htm
Pierre-Simon de Laplace http://www.math.unicaen.fr/~reyssat/laplace/imagerie.htm
Carl-Friedrich Gauss https://www.britannica.com/biography/Carl-Friedrich-Gauss

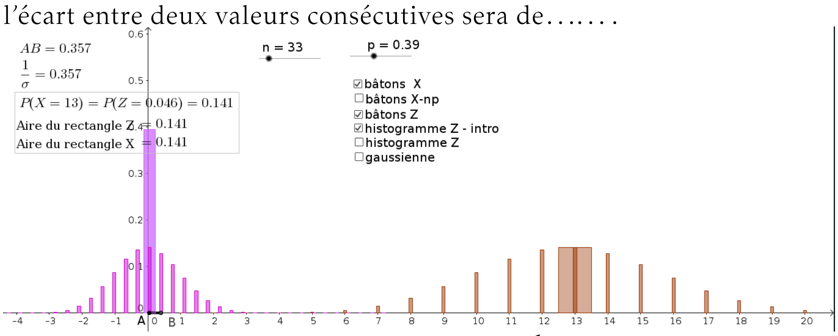
- pour recentrer, il suffit de poser $Y_n = X_n - np$ (mais l'étendue est toujours de $(n+1)$).



- pour réduire l'étendue on peut diviser par σ : on obtient $Z_n =$ ....

....

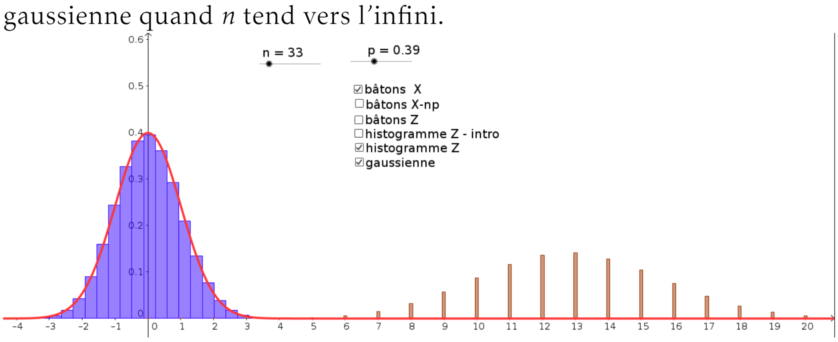
l'écart entre deux valeurs consécutives sera de.......



- pour qu'un rectangle de base $\frac{1}{\sigma}$, centré en $\frac{k-np}{\sigma}$ ait une aire qui vaut $P(X = k) = P\left(Z = \frac{k-np}{\sigma}\right)$, il faut que sa hauteur soit $\sigma \times P(X = k)$.

la somme des aires des rectangles vaut donc....

on remarque que l'aire de l'histogramme obtenu tend vers l'aire sous la gaussienne quand n tend vers l'infini.



Théorème de Moivre-Laplace

Soit X_n une variable aléatoire qui suit..

........., on pose...,

alors $\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) =$ ....

....

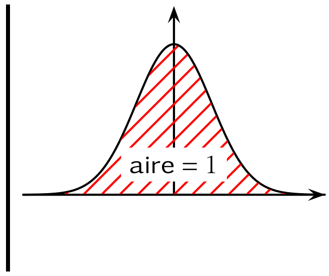
4.2 Espérance

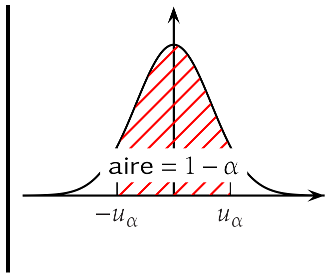
$X \sim \mathcal{N}(0;1)$ on a alors $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$ ($V(X) = \sigma_X^2$ est la variance de X).

4.3 Propriétés

L'aire du domaine délimité par la courbe de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ et l'axe des abscisses, pour $x \in]-\infty;+\infty[$ vaut 1.

Avec du bon sens (démonstration dans le document suivant), l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est un réel α vérifiant $\alpha \in]0;1[$.





On remarque que $(1-\alpha) \in$.........

Quelque soit $\alpha \in]0;1[$, on peut toujours trouver $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$ tels $P(a \leqslant X \leqslant b) = 1-\alpha$.

Théorème : Soit X une variable aléatoire suivant.............................

....

Pour tout réel $\alpha \in]0;1[$, il existe.. tel que

....

Valeurs particulières

- pour $\alpha = 0{,}05$, on trouve $u_\alpha \approx 1{,}96$, donc $P(-1{,}96 \leqslant X \leqslant 1{,}96) =$..........
- pour $\alpha = 0{,}01$, on trouve $u_\alpha \approx 2{,}58$, donc $P(-2{,}58 \leqslant X \leqslant 2{,}58) =$..........

4.4 Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

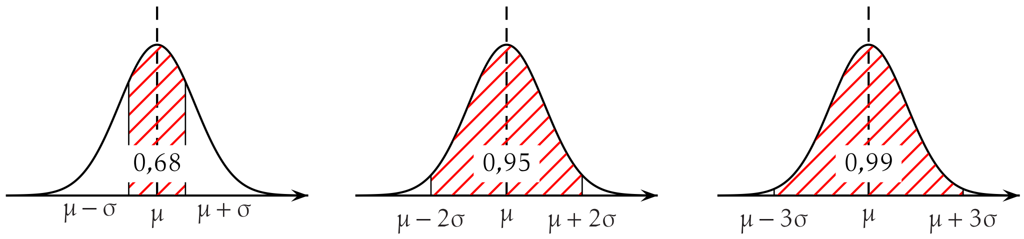
Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ si...

.... suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Dans ce cas :

- $E(X) =$... et $V(x) =$.....
- la courbe admet la droite d'équation........... comme axe de symétrie.

4.4 exercices
- p 415 n° 30 : loi normale ($a \leqslant X \leqslant b$)
- p 415 n° 32 : loi normale ($X \geqslant b$)
- p 416 n° 34 : lecture graphique
- p 416 n° 35 : lecture graphique

- 

$P(X \in [\mu - \sigma ; \mu + \sigma]) \approx 0{,}68$ $\quad$ $P(X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$ $\quad$ $P(X \in [\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]) \approx 0{,}99$

4.5 Exercices du bac

4.5.1 d'après Amérique du Nord, juin 2016

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}055$.
   Calculer que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable (une bille est vendable si son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm).
2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ', σ' étant un réel strictement positif.
   Sachant que $P(0{,}9 \leqslant Y \leqslant 1{,}1) = 0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ'.

Des remarques pleines de bons sens que vous avez eues

- on remarque que la proba cherchée est 0,98, or dans le cours il est dit que si la proba est environ 0,99 alors « on est à 3 sigma », donc ici on peut supposer que $\sigma' \approx \dfrac{0{,}1}{3} \approx 0{,}033$.
- à l'aide de la calculatrice : utilisation du mode « table ».
  demander les valeurs de la fonction :
  - $\sigma \mapsto \text{NormCD}(0{,}9, 1{,}1, X, 10)$ (pour Casio)
  - $\sigma \mapsto \text{NormCD}(0{,}9, 1{,}1, 10, X)$ (pour Ti)

  puis chercher dans le tableau de valeur l'antécédent de 0,98.
- à l'aide de la calculatrice : utilisation du mode « graphique » , puis résolution graphique à l'aide du mode « trace » ou du mode « solver »
- à l'aide de la calculatrice : utilisation du mode « solver »

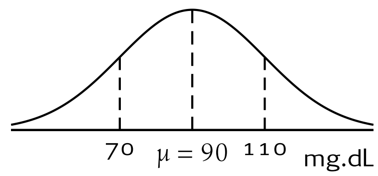
4.5.2 d'après Métropole, septembre 2016

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à $60\,\text{mg} \cdot \text{dL}^{-1}$ et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à $110\,\text{mg} \cdot \text{dL}^{-1}$. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre $70\,\text{mg} \cdot \text{dL}^{-1}$ et $110\,\text{mg} \cdot \text{dL}^{-1}$. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et $70\,\text{mg} \cdot \text{dL}^{-1}$ ne font pas l'objet d'un suivi particulier.

On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à 0,052.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en $mg \cdot dL^{-1}$, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.