EN CLASSE

Aujourd'hui, nous nous sommes lancés dans l'écriture d'un problème faisant intervenir des notions d'intégration… Voici une mise en forme de notre travail.

L'objectif est de calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives des fonctions f, g et les droites d'équations $x = 1{,}5$ et $x = 2$; sachant que $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$.

Ce que nous savons :

- si f est positive sur $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire du domaine (en unités d'aires) défini par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- Linéarité : $\displaystyle\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

  $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Partie A – Primitives

Montrer que les fonctions f et g sont les primitives d'une même fonction h que vous déterminerez.

Si f et g sont les primitives d'une même fonction, elles diffèrent d'une constante.
On remarque que $g(x) - f(x) = 2$, donc f et g sont bien les primitives d'une même fonction.
On a donc $f'(x) = g'(x) = h(x)$; d'où $h(x) = 3x^2 - 2x - 2$

Partie B – Fonction g

1. Justifier les différents éléments du tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[-1{,}5\,;2]$ et donner une valeur approchée au dixième de α, β, $g(\alpha)$ et $g(\beta)$.

x	$-1{,}5$		α		β		2
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de g	$\frac{3}{8}$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	3

On sait que $g'(x) = h(x) = 3x^2 - 2x - 2$

Signe de la dérivée : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 28$, donc g' admet deux racines réelles : $\alpha = \dfrac{2-\sqrt{28}}{2\times 3} = \dfrac{1-\sqrt{7}}{3} \approx -0{,}6$ et $\beta = \dfrac{1+\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}2$

Le coefficient de x^2 est 3, donc positif : la parabole est orientée « vers le haut », d'où le signe de la dérivée.

on trouve $g(\alpha) \approx 3{,}6$ et $g(\beta) \approx 0{,}9$

2. En déduire le signe de g sur l'intervalle $[-1{,}5\,;2]$.

D'après le tableau de variations, sur l'intervalle $[-1{,}5\,;2]$, le minimum de g est $\dfrac{3}{8}$, donc la fonction est positive sur cet intervalle.

3. Calculer la valeur exacte de $\displaystyle\int_{-1{,}5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x$, puis une valeur approchée au dixième et interpréter le résultat obtenu.

$$\int_{-1{,}5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-1{,}5}^{2} = \frac{1\,477}{92} \approx 7{,}7$$

La fonction g étant positive sur $[-1{,}5\,;2]$, l'intégrale représente l'aire (en unités d'aire) du domaine défini par la courbe de g, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -1{,}5$ et $x = 2$.

Partie C – Fonction f

1. Donner, en un minimum de calculs, le tableau de variations de la fonction f.

On sait que $f(x) - g(x) = -2$, la courbe représentative de f est l'image de celle de g par la translation de vecteur $-2\vec{j}$, d'où :

x	$-1{,}5$		α		β		2
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f			$\approx 1{,}6$				1
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	$-1{,}625$				$-1{,}1$		

2. Démontrer qu'il existe $\delta \in [-1{,}5\,;0]$, tel que $f(\delta) = 0$.

f est continue et strictement croissante sur $[-1{,}5\,;\alpha]$ et change de signe ; donc il existe un unique réel $\delta \in [-1{,}5\,;\alpha]$ tel que $f(\delta) = 0$.
f est décroissante sur $[\alpha\,;0]$ et $f(0) = 1$, donc f ne change pas de signe : elle ne s'annule pas sur cet intervalle.
Donc il existe un unique réel $\delta \in [-1{,}5\,;0]$, tel que $f(\delta) = 0$.

3. Compléter l'algorithme suivant : il permet de donner une valeur approchée de δ.

Algorithme 1 : Recherche par dichotomie

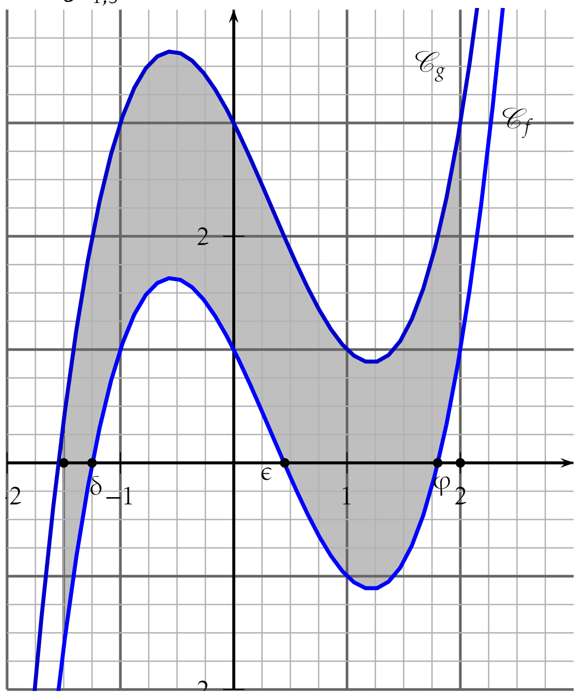
Données : la fonction f
Sortie : valeur de δ

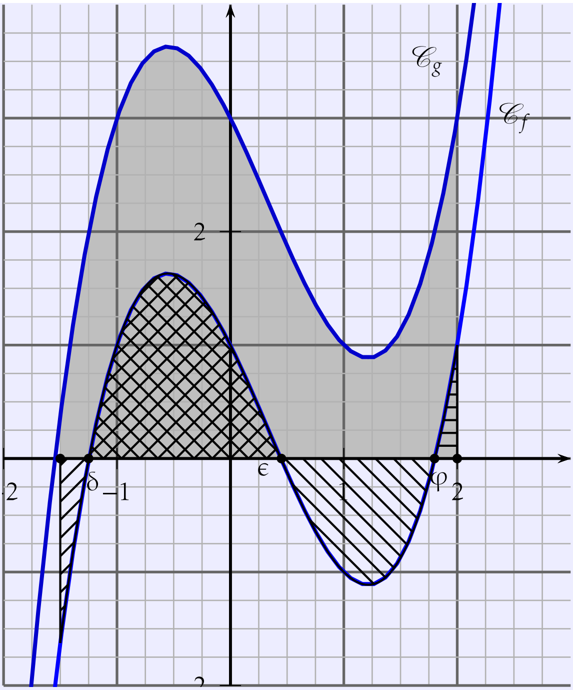
```
a prend la valeur −1,5
b prend la valeur 0
tant que b − a > 0,001 faire
    δ = (a + b)/2
    si f(δ) > 0 alors
        b prend la valeur δ
    sinon
        a prend la valeur δ
    fin
fin
return δ
```

En déduire une valeur approchée de δ au millième.
On trouve $\delta \approx -1{,}247$

Partie D – Aire d'un domaine

1. On admet que f s'annule en ϵ avec $\epsilon \in [\alpha\,;\beta]$ et en φ avec $\varphi \in [\beta\,;2]$.
Justifier que l'aire du domaine grisé s'obtient par le calcul :
$\mathscr{A} = \int_{-1{,}5}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$





sur l'intervalle $[-1{,}5\,;\delta]$, la fonction f est négative, donc $-f$ est positive ! On en déduit que :

$\displaystyle\int_{-1,5}^{\delta} -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1,5}^{\delta} f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire

$\displaystyle\int_{\delta}^{\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire

$\displaystyle\int_{\epsilon}^{\varphi} -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\epsilon}^{\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire

$\displaystyle\int_{\varphi}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'aire

L'aire du domaine est :

$$\mathscr{A} = \int_{-1,5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1,5}^{\delta} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\delta}^{\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\epsilon}^{\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\epsilon}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1,5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int_{-1,5}^{\delta} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\epsilon}^{\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varphi}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_{-1,5}^{2} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1,5}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1,5}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer l'aire de ce domaine en unités d'aire.

$\mathscr{A} = \displaystyle\int_{-1,5}^{2} g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1,5}^{2} 2\,\mathrm{d}x = [2x]_{-1,5}^{2}$

$= 2 \times 2 - 2 \times (-1,5) = 7$