
SUITES

$\alpha = \dots\dots\dots$ et $\beta = \dots\dots\dots$

NOMS

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n - 2n + \beta \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur sa limite.

2. Démontrer cette conjecture.

Pistes travail possibles :

- Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
- Trouver une expression de u_n en fonction de n et démontrer que cette expression est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ...

SUITES

$\alpha = \dots\dots\dots$ et $\beta = \dots\dots\dots$

NOMS

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n - 2n + \beta \end{cases}$$

1. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur sa limite.

2. Démontrer cette conjecture.

Pistes travail possibles :

- Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.
- Trouver une expression de u_n en fonction de n et démontrer que cette expression est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ...

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n - 2n + \beta \end{cases}$$

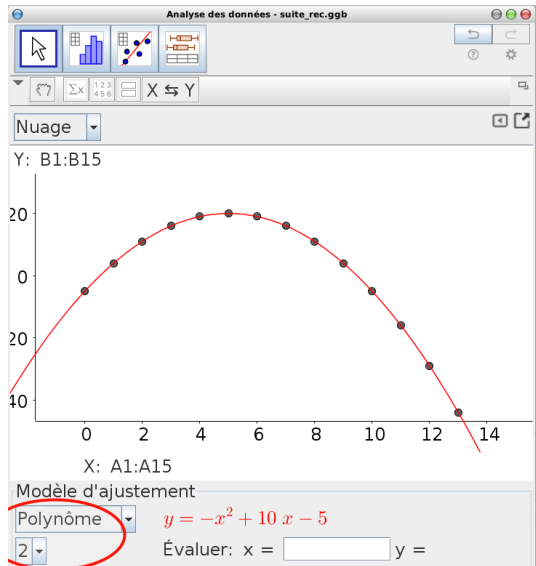
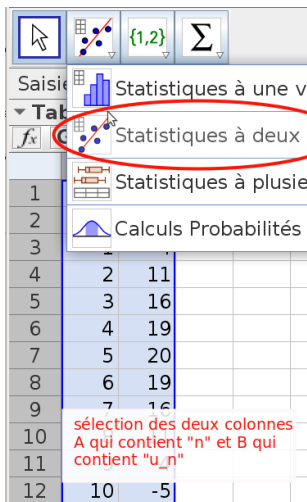
Conjecture : les points associés aux premiers termes semblent être placés sur un arc de parabole.

Dans ce cas : $u_n = an^2 + bn + c$ avec a , b et c étant des réels à déterminer.

Pour déterminer a , b et c , on peut procéder de différentes manières...

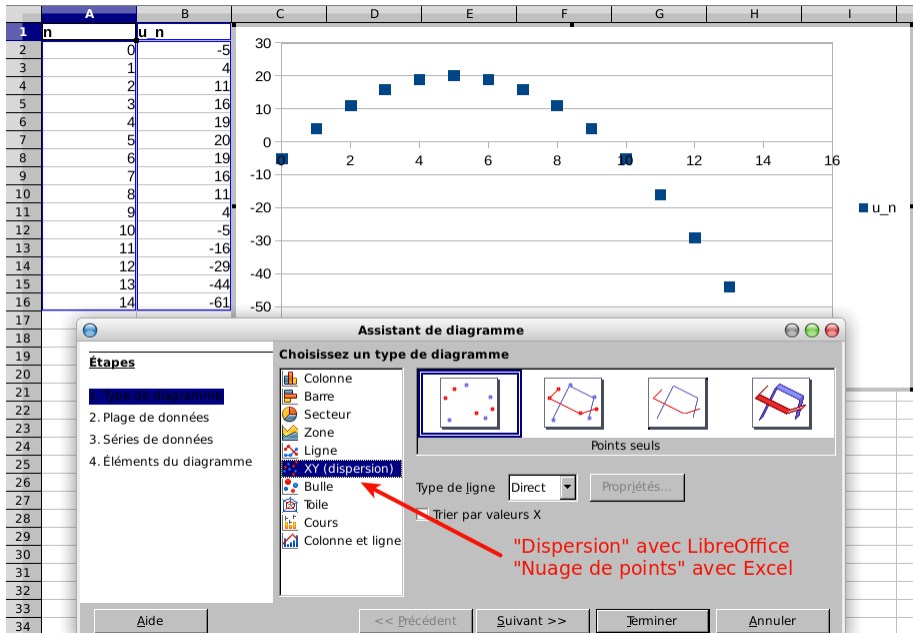
Pour les exemples, $\alpha = -5$ et $\beta = 9$

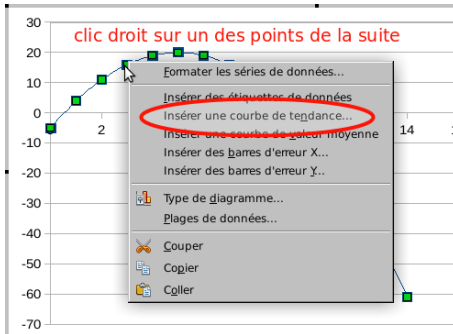
À l'aide de GeoGebra On calcule les premiers termes à l'aide du tableur de GGB, on demande l'affichage du nuage de points, puis l'équation de la fonction passant au plus près des points.



À l'aide d'un tableur On calcule les premiers termes à l'aide du tableur, on demande l'affichage du **nuage de points**, puis l'équation de la fonction passant au plus près des points.

Copie d'écran LibreOffice, Excel offre les mêmes possibilités.





Courbe de tendance pour les séries de données

Type **Ligne**

Type de régression

☐ Linéaire ☒ Polynomiale

☐ Logarithmique ☐ Exponentiel ☐ Moyenne glissante

Degré **2**

Période **2**

Options

Nom de la courbe de tendance

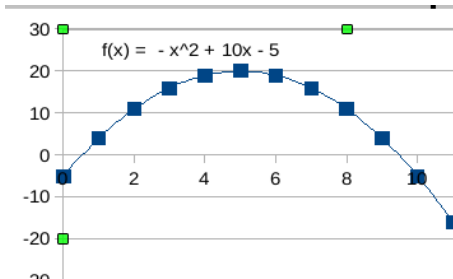
Extrapoler en avant **0**

Extrapoler en arrière **0**

☐ Forcer l'ordonnée à l'origine **0**

☒ **Afficher l'équation**

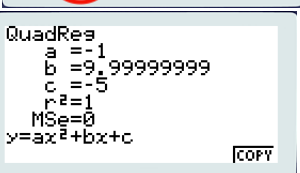
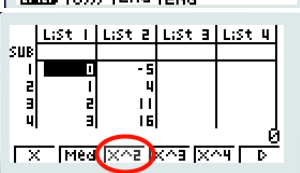
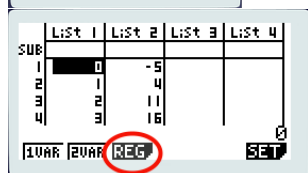
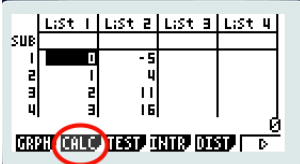
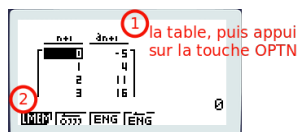
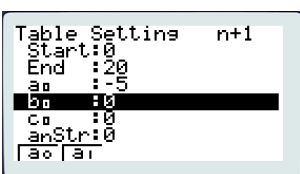
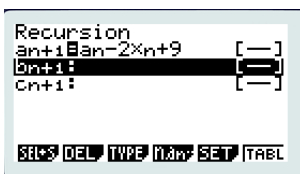
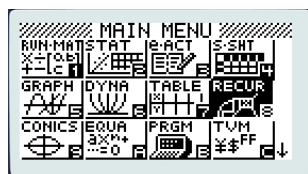
☐ Afficher le coefficient de détermination (R^2)



À l'aide de la calculatrice Le menu suite permet d'obtenir les premiers termes et de les représenter dans un repère.

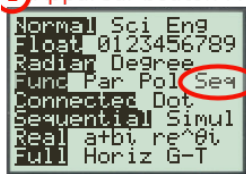
On peut ensuite copier les valeurs de n et u_n dans des listes, afin de chercher l'équation de la courbe en x^2 passant par les points de la suite...

Version Casio

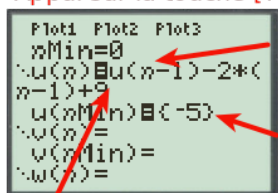


Version Ti

1 Appui sur bouton MODE



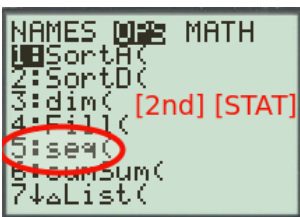
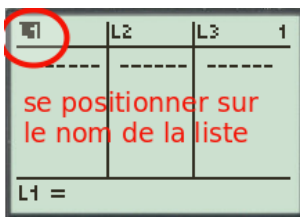
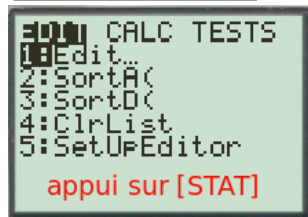
Appui sur la touche [Y=]



n s'obtient avec la touche [X,T,θ,n]

il suffit de taper -5, les accolades viennent après appui sur [enter]

u s'obtient avec [shift] puis [7]



L1	L2	L3	1
-----	-----	-----	
L1 = seq(n, n, 0, 10, 1)			

```
QuadReg L1, L2
```

L1	L2	L3	2
0		-----	
1		-----	
2		-----	
3		-----	
4		-----	
5		-----	
6		-----	
L2 = u(0, 10)			

appui sur [STAT]

```
EDIT 01:00 TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg
```

```
QuadReg
y=ax^2+bx+c
a=-1
b=10
c=-5
```

À la main On calcule les premiers termes, on dessine le nuage de points, et on reconnaît un arc de parabole, donc on suppose que $u_n = an^2 + bn + c$.

On sait que $u_0 = \alpha$; $u_1 = \alpha + \beta$ et $u_2 = \alpha + 2\beta - 2$.

On en déduit : $c = \alpha$

$$u_1 = a + b + c = \alpha + \beta \Leftrightarrow a + b + \alpha = \alpha + \beta \Leftrightarrow \beta = a + b$$

$$u_2 = 4a + 2b + c = \alpha + 2\beta - 2 \Leftrightarrow 4a + 2b + \alpha = \alpha + 2(a + b) - 2 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1 \Leftrightarrow b = \beta + 1$$

Donc **on suppose que** $u_n = -n^2 + (\beta + 1)n + \alpha$ (que ce soit à la main ou à l'aide d'un logiciel, on a travaillé que sur un nombre fini de points).

Démonstration de la conjecture On veut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = -n^2 + (\beta + 1)n + \alpha$$

Initialisation on remarque que $u_0 = \alpha$ (énoncé) et que $u_0 = -0^2 + (\beta + 1) \times 0 + \alpha = \alpha$

Hérédité Supposons qu'il existe un entier p tel que $u_p = -p^2 + (\beta + 1)p + \alpha$, montrons qu'alors on a bien

$$u_{p+1} = -(p+1)^2 + (\beta + 1)(p+1) + \alpha = -p^2 + (\beta - 1)p + \alpha + \beta$$

Démonstration On sait que $u_{p+1} = u_p - 2p + \beta$

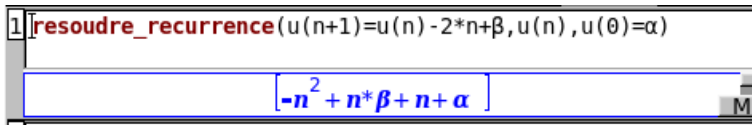
$$\Leftrightarrow u_{p+1} = \underbrace{-p^2 + (\beta + 1)p + \alpha - 2p + \beta}_{u_p \text{ (par H.R.)}}$$

$$\Leftrightarrow u_{p+1} = -p^2 + (\beta - 1)p + (\alpha + \beta)$$

Conclusion On vient de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_n = -n^2 + (\beta + 1)n + \alpha$$

Xcas Xcas démontre l'expression car il travaille avec la formule littérale !



Limite Comme $u_n = -n^2 + (\beta + 1)n + \alpha$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$