
COSINUS ET TAYLOR

Exercice 1 — Formules de Taylor

Certains croient, à tort, que les calculatrices utilisent les *formules de Taylor* pour calculer les cosinus et sinus d'un angle donné...

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

où $k!$ désigne la factorielle de l'entier k , c'est à dire le produit $1 \times 2 \times \dots \times k$.

Exercice 2 — Représentation graphique

Ces formules permettent d'approximer une fonction par un polynôme sur un intervalle donné.

Soit $\mathcal{C}$ la fonction définie de $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ par $\mathcal{C}(x, n) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.

La courbe représentative de $\mathcal{C}$ est celle d'un polynôme qui va approximer celle de la fonction cosinus.

1. Expliciter $\mathcal{C}(x, n)$ pour n de 1 à 3.

$$n = 1 \quad \mathcal{C}(x, 1) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$n = 2 \quad \mathcal{C}(x, 2) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

$$n = 3 \quad \mathcal{C}(x, 3) = -\frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

2. À l'aide de GeoGebra, représenter dans un même graphique les courbes représentatives de la fonction cosinus et de $\mathcal{C}(x, n)$ (n est un curseur pouvant prendre les valeurs 0 à 30).

Aide : GeoGebra dispose de la commande **séquence** pour faire des boucles *pour*, de la commande **somme** pour sommer les termes d'une liste et de la commande **!** pour la factorielle.

Exercice 3 — Calculs

À l'aide des représentations graphiques précédentes, le graphe de la fonction $\mathcal{C}(x, 5)$ semble « bien coller » à celui de la fonction cosinus sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

1. Écrire en langage naturel un algorithme vérifiant les étapes suivantes :

Données : la valeur de α , l'angle dont on veut calculer le cosinus

Sorties : la valeur du cosinus de α calculé à l'aide de $\mathcal{C}(x, 5)$ et l'écart entre cette valeur et celle calculée par la fonction cos de la calculatrice

- 1 Trouver α_0 , la valeur principale de α
- 2 Calculer $\mathcal{C}(\alpha_0, 5)$
- 3 Calculer $\Delta = \mathcal{C}(\alpha_0, 5) - \cos \alpha$

Données : α

Sorties : $\mathcal{C}(\alpha_0, 5)$ et $\Delta = \mathcal{C}(\alpha_0, 5) - \cos \alpha$

/* recherche de la mesure principale */

- 1 α_0 prend la valeur α
- 2 tant que $\alpha_0 > \pi$ faire
- 3 | α_0 prend la valeur $\alpha_0 - 2\pi$
- 4 fin
- 5 tant que $\alpha_0 \leq -\pi$ faire
- 6 | α_0 prend la valeur $\alpha_0 + 2\pi$
- 7 fin
- 8 $\mathcal{C}$ prend la valeur $-\frac{1}{3628800}\alpha_0^{10} + \frac{1}{40320}\alpha_0^8 - \frac{1}{720}\alpha_0^6 + \frac{1}{24}\alpha_0^4 - \frac{1}{2}\alpha_0^2 + 1$
- 9 Δ prend la valeur $\mathcal{C} - \cos \alpha$
- 10 Afficher $\mathcal{C}; \Delta$

2. Tester cet algorithme à l'aide d'une calculatrice et/ou d'Algobox et/ou Xcas.