## BAC BLANC – MATHÉMATIQUES – Section STMG

### Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 3 exercices

Une calculatrice par candidat autorisée.

Toute trace de recherche sera prise en compte pour l'évaluation.

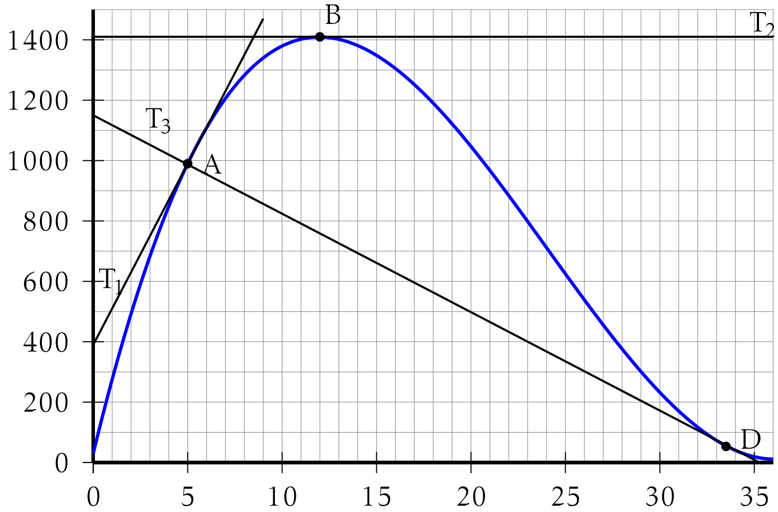
### Exercice 1 — *5 points*

D'après Métropole, juin 2015

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).*
*Pour chacune des cinq questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*
*Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.*
*Les deux parties sont indépendantes.*

#### Partie A –

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;36]$.




A est le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 5, B celui d'abscisse 12 et D celui d'abscisse 33,5.

$T_1$ est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, $T_2$ celle au point B et $T_3$ celle au point D.

**1.** L'image de 12 par la fonction $f$ est environ

**a.** 0 **b.** 760 **c.** 1 410 **d.** 1 900

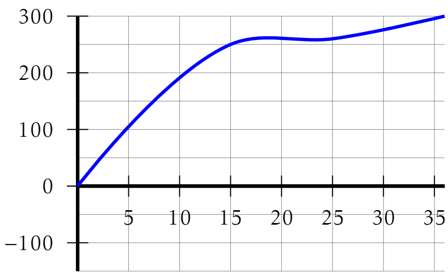
2. $f'(5)$ est environ égal à

a. $-30$ b. $125$ c. $-125$ d. $1,25$

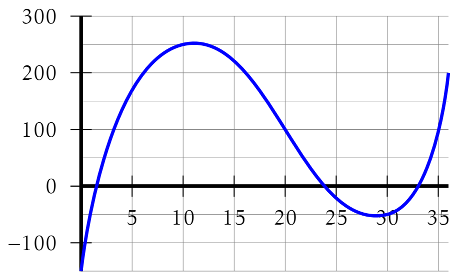
Le nombre dérivé est le coefficient directeur (la pente) de la tangente. À partir du point A, si on se déplace d'une unité en abscisse, on « monte » d'environ 100 unités en ordonnées.

3. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction dérivée de $f$. Laquelle ?

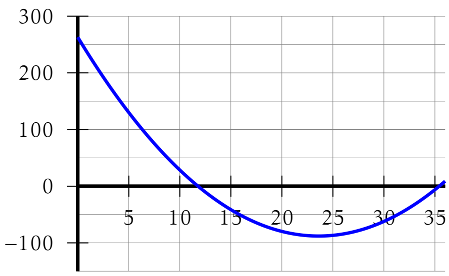
a. Courbe A



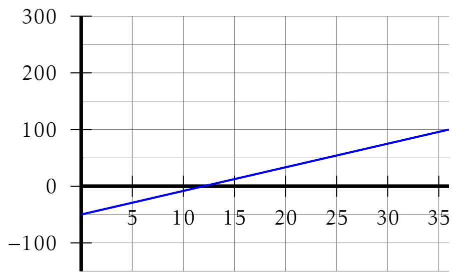

b. Courbe B




c. Courbe C




d. Courbe D




La fonction $f$ est croissante sur $[0;12]$, puis décroissante sur $[12;36]$. Cela signifie que sa dérivée est positive sur $[0;12]$ et est négative sur $[12;36]$.

**Partie B –**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0;36]$ par :

$$g(x) = 0,2x^3 - 14,4x^2 + 259,2x + 295,2.$$

1. La fonction dérivée $g'$ de $g$ sur $[0;36]$ est définie par :

a. $g'(x) = 0,5x2 - 28,8x + 259,2$ b. $g'(x) = 0,6x^2 - 28,8x + 259,2$

c. $g'(x) = 0,6x^2 - 28,8x + 554,4$ d. $g'(x) = 0,2x^2 - 144x + 554,4$

2. Le maximum de $g$ sur $[0;36]$ est :

a. $295,2$ b. $1\,677,6$ c. $12$ d. $36$

À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on trouve que le maximum est 1 677,6

## Exercice 2 — *7 points*

D'après Antilles-Guyanne, septembre 2014

*Les parties A et B sont dans une large mesure indépendantes*

Un magasin de vêtements a constitué un stock d'un certain type de pantalons venant de trois fabricants $f_1$, $f_2$, et $f_3$.

Certains de ces pantalons présentent un défaut.

Pour tout événement E on note $\overline{\mathrm{E}}$ son événement contraire et $p(\mathrm{E})$ sa probabilité.

### Partie A –

60 % du stock provient du fabricant $f_1$, 30 % du stock provient du fabricant $f_2$, et le reste du stock provient du fabricant $f_3$.

La qualité de la production n'est pas la même selon les fabricants.

Ainsi :

- 6 % des pantalons produits par le fabricant $f_1$ sont défectueux ;
- 4 % des pantalons produits par le fabricant $f_2$ sont défectueux ;
- 2 % des pantalons produits par le fabricant $f_3$ sont défectueux.

On prélève au hasard un pantalon dans le stock. On considère les événements suivants :

- $\mathrm{F}_1$ : « le pantalon a été fabriqué par $f_1$ » ;
- $\mathrm{F}_2$ : « le pantalon a été fabriqué par $f_2$ » ;
- $\mathrm{F}_3$ : « le pantalon a été fabriqué par $f_3$ » ;
- D : « le pantalon est défectueux ».

1. Calculer la probabilité de l'événement $F_3$.

   Comme 60 % des pantalons sont fabriqués par $f_1$ et que 30 % sont fabriqués par $f_2$, il y en 10 % fabriqués par $f_3$.
   On en déduit que $p(F_3) = \dfrac{10}{100} = 0,1$

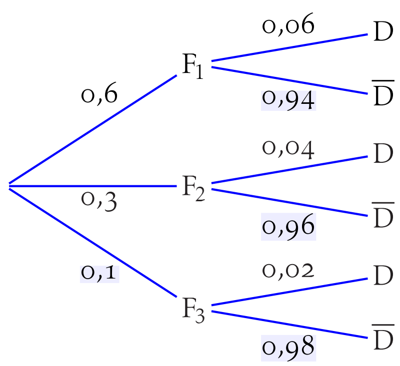
2. **a)** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.

   **b)** Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $0,05$.

   D'après les probabilités totales : $p(D) = p(D \cap F_1) + p(D \cap F_2) + p(D \cap F_3) = 0,6 \times 0,06 + 0,3 \times 0,04 + 0,1 \times 0,02 = 0,036 + 0,012 + 0,002 = 0,05$

   **c)** En déduire la probabilité de l'événement : « le pantalon est sans défaut ».

   L'événement « le pantalon est sans défaut » est le contraire de « le pantalon est défectueux », c'est donc l'événement $\overline{D}$. $p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0,05 = 0,95$.




3. On prélève un pantalon parmi ceux qui présentent un défaut.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par le fabricant $f_1$ ?

   On cherche $p_D(F_1) = \dfrac{p(D \cap F_1)}{p(D)} = \dfrac{0,036}{0,05} = 0,72$. Il y a 72% de chances que le pantalon ait été fabriqué par le fabricant $f_1$.

**Partie B –**

Dans toute cette partie, on admet que le pourcentage de pantalons du stock présentant un défaut est égal à 5 %.

On choisit au hasard un lot de 3 pantalons dans le stock. On suppose que le stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à 3 tirages indépendants avec remise.

On appelle X la variable aléatoire qui dénombre les pantalons présentant un défaut dans le lot de 3 pantalons prélevés.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

   Il s'agit d'expériences aléatoires identiques et indépendantes (choisir un pantalon) et n'ayant que deux issues (défectueux ou non) : c'est donc une épreuve de Bernoulli. La loi associée à une répétition d'épreuves de Bernoulli est la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$. Ici les paramètres sont $n = 3$ (on choisi 3 pantalons et $p = 0,05$ la probabilité d'être défectueux).

2. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, que le lot prélevé comporte exactement un pantalon défectueux ? On pourra s'aider d'un arbre de probabilités faisant intervenir les événements D et $\overline{D}$.

À l'aide de la calculatrice (fonction Bpd) on trouve que $p(X = 1) \approx 0{,}135$

3. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, que le lot prélevé comporte au moins un pantalon défectueux ?

« Au moins un pantalon défectueux » est le contraire de « Aucun pantalon défectueux ». « Aucun pantalon défectueux » correspond à $X = 0$. Toujours à l'aide de la calculatrice (fonction Bpd) on trouve $p(X = 0) \approx 0{,}857$, donc la probabilité de l'événement contraire est $1 - 0{,}857 = 0{,}143$

## Exercice 3 — *8 points*

Polynésie, septembre 2013

Une entreprise fabrique et commercialise un alliage métallique. Chaque mois, elle peut produire jusqu'à 10 tonnes de cet alliage et en vend toute la production.

### Partie A – Étude du coût total et de la recette

Le coût total de production de $x$ tonnes de l'alliage, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C dont l'expression est

$$C(x) = x^3 - 6x^2 + 24x + 135$$

où $x$ appartient à l'intervalle $[0;10]$.

La courbe $\Gamma$, représentant la fonction C dans un repère du plan, est donnée en annexe.

1. Donner par lecture graphique :
   a) le coût total d'une production de 4 tonnes ;
   On lit qu'une production de 4 tonnes coûte 200 milliers d'euros.
   b) la quantité correspondant à un coût total de production de 600 milliers d'euros.
   On lit qu'un coût de 600 milliers d'euros correspond à une production de 9 tonnes d'alliage.
2. Déterminer par le calcul :
   a) le coût total de production de 6 tonnes de l'alliage.
   On calcule $C(6) = 6^3 - 6 \times 6^2 + 24 \times 6 + 135 = 279$. La production de 6 tonnes d'alliage coûte 279 €.
   b) le coût moyen de production d'une tonne lorsque l'entreprise produit 6 tonnes.
   Pour trouver coût moyen, il faut diviser par le nombre d'unités produites. Ici $\dfrac{279}{6} = 46{,}5$. Donc le coût moyen d'une tonne d'alliage est de 46 500 €
3. Après une étude de marché, le prix de vente de l'alliage produit a été fixé à 60 milliers d'euros la tonne.
   a) Calculer la recette pour la vente de 5 tonnes d'alliage.
   5 tonnes à 60 000 € la tonne, cela fait une recette de 300 000 €
   b) On note R la fonction qui modélise la recette, exprimée en milliers d'euros, pour $x$ tonnes vendues. Donner une expression de $R(x)$ en fonction de $x$.
   $R(x) = 60 \times x$

**c)** Représenter graphiquement la fonction R sur l'intervalle $[0\,;10]$, dans le même repère que la courbe $\Gamma$ sur l'annexe.

**d)** Pour quelles valeurs de $x$ l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

L'entreprise réalise un bénéfice quand la recette est supérieure aux coûts de production. On lit $x \in [3\,;8{,}5]$

### Partie B – Étude algébrique du bénéfice

On note B la fonction qui modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, sur l'intervalle $[0\,;10]$.

**1.** Montrer que l'expression de $B(x)$, lorsque $x$ appartient à l'intervalle $[0\,;10]$ est :

$$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135.$$

On sait que $B(x) = R(x) - C(x)$
$B(x) = 60x - (x^3 - 6x^2 + 24x + 135)$
$B(x) = 60x - x^3 + 6x^2 - 24x - 135$
$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135$

**2.** On note B′ la fonction dérivée de la fonction B. Calculer $B'(x)$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\,;10]$.

$B(x) = -x^3 + 6x^2 + 36x - 135$
on reconnaît un polynôme du troisième degré de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a = -1$, $b = 6$, $c = 36$ et $d = -135$.
Sa dérivée est de la forme $3ax^2 + 2bx + c$, donc ici $B'(x) = 3 \times (-1)x^2 + 2 \times 6x + 36 = -3x^2 + 12x + 36$

**3.** On admet que $B'(x)$ peut s'écrire $B'(x) = (x + 2)(18 - 3x)$.
Étudier le signe de B′ et en déduire les variations de B sur l'intervalle $[0\,;10]$.

D'après la question précédente B′ est une fonction du second degré, sa représentation graphique est une parabole orientée « vers le bas » car le coefficient de $x^2$ est négatif.

D'après l'expression factorisée, B′ s'annule en $-2$ et $6$ ; donc $B'(x) \geqslant 0$ si $x \in [-2\,;6]$, mais comme on travaille sur $[0\,;10]$, on a : $B'(x)$ positif si $x \in [0\,;6]$ et $B'(x)$ négatif sur $[6\,;10]$.

**4.** Déterminer la quantité d'alliage à produire pour réaliser un bénéfice maximal.

D'après la question précédente, on peut construire le tableau de variations de la fonction B.

| $x$ | $0$ | | $6$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $B'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| variations de B | $-135$ | $\nearrow$ | $81$ | $\searrow$ | $-175$ |

La fonction B atteint son maximum pour 6 tonnes d'alliage, le bénéfice est alors de 81 000 €.

**ANNEXE DE L'EXERCICE 3. À RENDRE AVEC LA COPIE**

| Nº Anonymat |
|---|
| ........................ |