correction		24
ANT	1. fct f : Dérivée poly degré 2	2
FCT01	Fct g : Dérivée 1/x	1
FCT02	fct g : dérivée k*1/x	1
FCT03	fct g : dérivée correcte	1
	total	5
ANT	2.A.1 lire image	1
ANT	2.A.2 lire antécédent	1
CAL	calculer moyenne	1
CAL	2.B.1 Expression de C_M	1
FCT01	dérivée : formules utilisées correctes	2
CAL	dérivée : calculs corrects	1
RAI	2.B.2 Vérifier expression : méthode	1
CAL	vérif. Express. Calculs	2
ANT	2.B.3 Justifier signe de (x-6)	2
CAL	signe de C'_M	1
FCT04	variations de C_M	1
REP	2.B.4 Lire tab var pour min	1
CAL	2.C.1 Calcul de B(x)	2
CAL	2.C.2 calculer image	1
RAI	2.C.3 Argumenter + contre exemple	1
	total	19

C03

– note sur 24

NOM ....- Mois de naissance ....

Exercice 1 — Dérivées

5 points

Donner les dérivées des fonctions suivantes : (où m est le n° de votre mois de naissance).

$f(x) = 3x^2 + mx + 5 \qquad g(x) = m + \dfrac{8}{x}$

$f'(x) = 3 \times 2x + m = 6x + m$	$g'(x) = -\dfrac{8}{x^2}$

Exercice 2 —

19 points

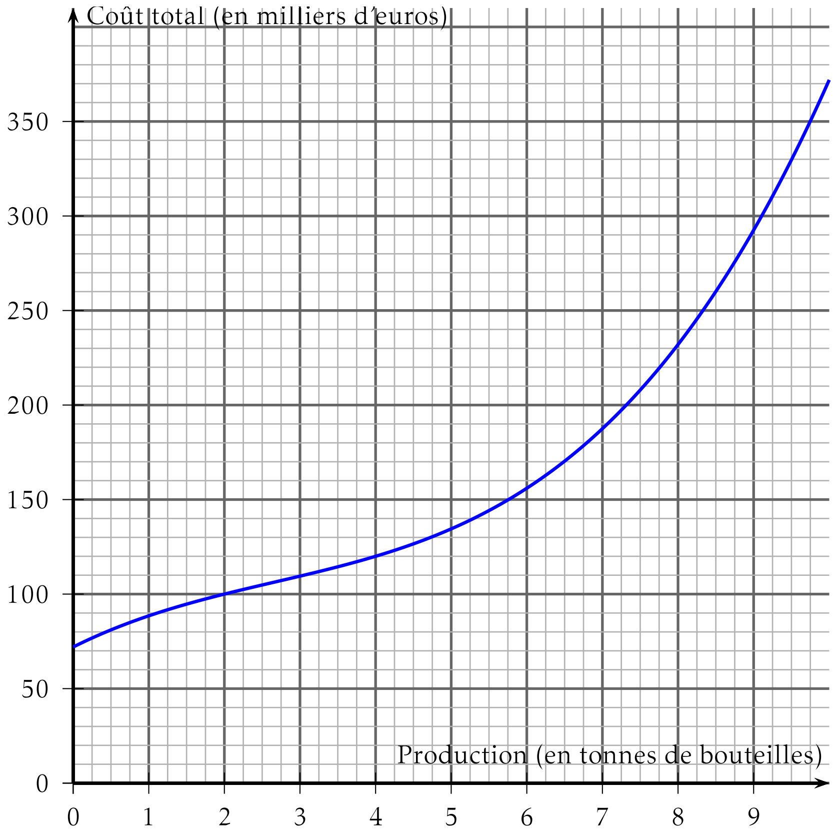
d'après Centres Étrangers, juin 2015 – exercice 4

Une entreprise fabrique des bouteilles en verre. La production quotidienne, exprimée en tonnes, varie entre 0 et 10.

Pour l'entreprise, le coût correspondant à la fabrication de x tonnes de bouteilles, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;10]$ par :

$$f(x) = 0,5x^3 - 4x^2 + 20x + 72$$

On a représenté ci-dessous la fonction f dans un repère orthogonal du plan.



Partie A –

Pour répondre à ces questions, dessiner sur le graphique les « pointillés de lecture ».

1. Déterminer, par lecture graphique, le coût correspondant à la fabrication d'une tonne de bouteilles.
2. Compléter la case du tableau suivant en fonction de votre mois de naissance à l'aide d'une lecture graphique (pour les calculs on arrondi au dixième).

mois de naissance	janv. - fev. mars	avr. - mai - juin	juil. - août - sept.	oct. - nov. - dec.
coût de fabrication en milliers d'euros	110	120	130	140
nombre de tonnes de bouteilles	3	4	4,75	5,25
coût moyen en milliers d'euros de fabrication d'une tonne de bouteilles	36,6	30	27,4	26,7

Partie B –

On appelle coût moyen la fonction $\mathcal{C}_M$ définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$\mathcal{C}_M(x) = \frac{f(x)}{x}$$

1. Calculer la dérivée de la fonction $\mathcal{C}_M$, notée $\mathcal{C}'_M$.

$\mathcal{C}_M(x) = \dfrac{0{,}5x^3 - 4x^2 + 20x + 72}{x} = \dfrac{0{,}5x^3}{x} - \dfrac{4x^2}{x} + \dfrac{20x}{x} + \dfrac{72}{x} = 0{,}5x^2 - 4x + 20 + \dfrac{72}{x}$
donc $\mathcal{C}_M$ est de la forme $u(x) + v(x)$ avec
$u(x) = 0{,}5x^2 - 4x + 20$ et donc $u'(x) = 2 \times 0{,}5x - 4 = x - 4$
$v(x) = \dfrac{72}{x}$ donc $v'(x) = -\dfrac{72}{x^2}$
d'où $\mathcal{C}'_M(x) = x - 4 - \dfrac{72}{x^2}$

2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;\ 10]$, $\mathcal{C}'_M(x)$ peut s'écrire

$$\mathcal{C}'_M(x) = \frac{(x-6)\left(x^2 + 2x + 12\right)}{x^2}$$

$$\frac{(x-6)\left(x^2 + 2x + 12\right)}{x^2}$$
$$= \frac{x^3 + 2x^2 + 12x - 6x^2 - 12x - 72}{x^2}$$
$$= \frac{x^3 - 4x^2 - 72}{x^2}$$
$$= \frac{x^3}{x^2} - \frac{4x^2}{x^2} - \frac{72}{x^2}$$
$$= x - 4 - \frac{72}{x^2}$$
$$= \mathcal{C}'_M$$

3. Justifier que $\mathcal{C}'_{\mathrm{M}}(x)$ est du signe de $(x-6)$ pour x variant dans l'intervalle $]0\,;\,10]$ et en déduire le tableau des variations de la fonction $\mathcal{C}_{\mathrm{M}}$.

   Comme $x^2 \geqslant 0$, le signe de $\mathcal{C}'_{\mathrm{M}}$ est celui du numérateur.
   sur $[0\,;10]$, $x^2+2x+12>0$, donc le signe du numérateur est celui de $(x-6)$.

x	0		6		10
signe de $(x-6)$		$-$	0	$+$	
signe de $\mathcal{C}'_{\mathrm{M}}(x)$		$-$	0	$+$	
variations de $\mathcal{C}_{\mathrm{M}}$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

4. Déterminer la production de bouteilles correspondant à un coût moyen minimal.

   À l'aide du tableau, le coût minimal est atteint pour une production de 6 000 bouteilles.

Partie C –

L'entreprise vend ses bouteilles de verre au prix de 40 milliers d'euros la tonne.

1. On note $\mathcal{B}$ la fonction bénéfice, exprimée en milliers d'euros. (Rappel : Bénéfice = Recette - Coût). Montrer que l'expression de $\mathcal{B}(x)$ sur l'intervalle $[0\,;10]$ est l'une des fonctions suivantes :
   - $\mathcal{B}(x) = -0,5x^3+4x^2+20x-72$
   - $\mathcal{B}(x) = -0{,}5x^3-4x^2+20x+112$
   - $\mathcal{B}(x) = -0{,}5x^3+4x^2-20x-32$

2. À l'aide de la fonction $\mathcal{B}$ choisie, calculer le bénéfice associé à une production de 6,5 tonnes.
   $\mathcal{B}(6{,}5) = 89{,}687\,5$

3. Que pensez-vous de l'affirmation « le bénéfice est maximal lorsque le coût moyen est minimal » ? Justifier la réponse.
   Le coût moyen est minimal pour $x=6$, dans cas, le bénéfice est $\mathcal{B}(6)=84$. Ce qui donne un bénéfice inférieur au précédent. L'affirmation est fausse.