BAC BLANC – MATHÉMATIQUES – Section STMG
Durée de l'épreuve : 3 heures

Une calculatrice par candidat autorisée.

Toute trace de recherche sera prise en compte pour l'évaluation.

d'après le sujet de l'APMEP – Bac STMG, Pondichéry - 26 avril 2017

Exercice 1 —

3 points

Le service marketing d'un centre commercial veut évaluer l'impact des frais engagés en publicité, par mois, sur le nombre de clients.

Pour cela, ce service s'appuie sur les données ci-dessous, relevées sur une période de 6 mois :

Frais publicitaires x_i (en milliers d'euros)	1,9	2,4	1,5	0,9	2,3	1,7
Fréquentation y_i (en milliers de clients)	190	250	170	150	210	180

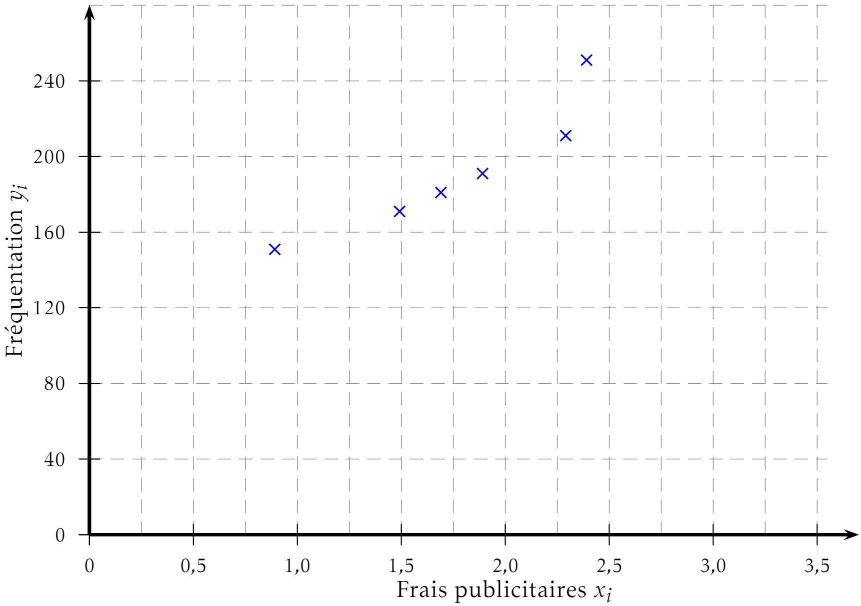
Le nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ y_i)$ est représenté ci-dessous.

1. Donner à l'aide de la calculatrice une équation de la droite réalisant un ajustement affine de ce nuage de points, obtenue par la méthode des moindres carrés.
On arrondira les coefficients au centième.

À l'aide de la calculatrice on trouve : $a = 58{,}34$ et $b = 87{,}62$, une équation de la droite des moindres carrés est donc $y = 58{,}34x + 87{,}62$.

2. On décide d'ajuster ce nuage de points par la droite d'équation :
$y = 58,3x + 87,6$.

a) On estime alors que pour 4 000 euros de frais publicitaires engagés, la fréquentation s'élèverait à 321 000 clients. Vérifier la cohérence de l'esti-


240
200
160
120
80
40
0
Fréquentation y_i
0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
Frais publicitaires x_i

mation annoncée.

4 000 € de frais correspondent à $x = 4$ (4 milliers d'euros), on calcule $y = 58{,}3 \times 4 + 87{,}6 = 320{,}8$.
On peut donc espérer 320,8 centaines de client, soient 32 080
L'estimation de 321 000 clients est donc cohérente.

b) Quel est le montant des frais publicitaires devant être engagés pour espérer 400 000 clients au cours d'un mois ?
On arrondira à la centaine d'euros.

Pour espérer 400 000 clients (400 milliers de clients), il faut trouver x tel que $400 = 58{,}3 \times x + 87{,}6$
$58{,}3 \times x = 400 - 87{,}6$
$58{,}3 \times x = 312{,}4$
$x = \dfrac{312{,}4}{58{,}3}$
$x \approx 5{,}4$
Pour espérer 400 000 clients, il faut engager 5,4 milliers d'euros, c'est à dire environ 5 400 € (arrondi à la centaine).

c) Le centre commercial décide d'engager 5 000 euros pour la campagne publicitaire du prochain mois. Lors du bilan, on dénombre 330 000 clients ayant fréquenté le site au cours de ce mois. Comment peut-on analyser ce résultat ?

D'après le modèle, pour 5 000 € de campagne publicitaire ($x = 5$), on peut espérer ;
$y = 58{,}3 \times 5 + 87{,}6 = 379{,}1$, c'est à dire 379 100 clients.
Le nombre de clients réel est moins important que le nombre prévu. Le modèle ne donne qu'une estimation.

Exercice 2 — *5 points*

Le diabète de type 1 est une maladie qui apparaît le plus souvent durant l'enfance ou l'adolescence.
Les individus atteints par cette maladie produisent très peu ou pas du tout d'insuline, hormone essentielle pour l'absorption du glucose sanguin par l'organisme.

En 2016, 542 000 enfants dans le monde étaient atteints de diabète de type 1. Des études récentes permettent de supposer que le nombre d'enfants diabétiques va augmenter de 3 % par an à partir de 2016. On note u_n le nombre d'enfants diabétiques dans le monde pour l'année $(2016+n)$. Ainsi $u_0 = 542\,000$.

1. Étude de la suite (u_n) :
   a) Calculer u_1.

      Une augmentation de 3% revient à multiplier par $\left(1+\dfrac{3}{100}\right)$ soit 1,03.
      donc $u_1 = 1{,}03 \times u_0 = 1{,}03 \times 542\,000 = 558\,260$.

   b) Donner la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.

      Pour passer d'un terme au suivant, il multiplier par 1,03, (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,03.

   c) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

      Par définition d'une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$; ici $u_0 = 542\,000$ et $q = 1{,}03$,
      donc $u_n = 1{,}03^n \times 542\,000$

   d) La feuille de calcul ci-dessous, extraite d'un tableur, permet de calculer les termes de la suite (u_n). Les cellules de la colonne C sont au format « nombre à zéro décimale ». Quelle formule, saisie dans la cellule C3 puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir les valeurs de la colonne C ?
      Une formule possible est : `=C2*1.03`

	A	B	C
1	Année	n	u_n
2	2016	0	542 000
3	2017	1	
…	…	…	…

2. Calculer le nombre d'enfants atteints de diabète de type 1 dans le monde en 2021.

   L'année 2021 correspond à l'indice 5, on peut soit continuer le tableau, soit utiliser le menu adapté de la calculatrice, soit utiliser l'expression $u_n = 1{,}03^n u_0 \ldots$
   On trouve $u_5 = 628\,326$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	U prend la valeur 542 000
	N prend la valeur 0
Traitement	Tant que $U < 625\,000$
	U prend la valeur $1,03 \times U$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin Tant que

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. *On arrondira les valeurs de* U *à l'unité.*

U	542 000	558 260	575 008	592 258	610 026	628 327
N	0	1	2	3	4	5
$U < 625\,000$?	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	FAUX

b) Que permet de calculer cet algorithme dans le contexte de l'exercice ?

Cet algorithme permet de déterminer le rang de l'année (en prenant 0 pour le rang de 2016) à partir duquel le nombre de le nombre d'enfants atteints de diabète de type 1 dans le monde dépasse 625 000.

Exercice 3 — *6 points*

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Partie A – Lectures graphiques

À l'aide du graphique donné ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le montant des charges pour 5 pièces produites par jour ?

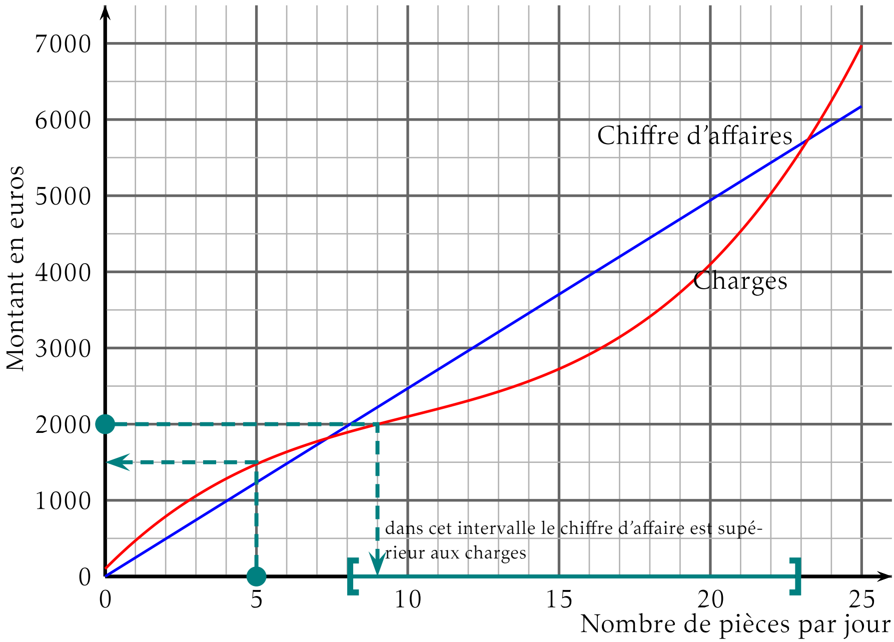
   On lit que le montant des charges pour 5 pièces produites par jour est de 1 500 €.

2. Combien de pièces sont produites par jour pour un montant des charges de 2 000 euros ?

   Si montant des charges est de 2 000 euros, on produit 9 pièces.

3. Quelles quantités produites par jour permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice ?

L'entreprise réalise un bénéfice si le chiffre d'affaire est supérieur aux charges : il faut produire entre 8 et 23 pièces.



Partie B – Étude du bénéfice

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 25] par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100.$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 25]$ est : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$.

   Le bénéfice est la différence entre le chiffre d'affaire et le montant des charges :
   Chaque pièce est vendue 247 €, donc la recette (chiffre d'affaire) est donnée par $R(x) = 247x$.
   On en déduit : $B(x) = R(x) - C(x)$
   $B(x) = 247x - (x^3 - 30x^2 + 400x + 100)$
   $B(x) = 247x - x^3 + 30x^2 - 400x - 100$
   $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
   Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 25]$.

   $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$ donc $B'(x) = -3x^2 + 30 \times 2x - 153$
   $B'(x) = -3x^2 + 60x - 153$

3. Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		25
signe de $B'(x)$		-	0	+	0	-	

- B' est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -3$, $b = 60$ et $c = -153$.
  Sa représentation graphique est une parabole ;
- le coefficient de x^2 est -3, donc la parabole est orientée « vers le bas » ;
- **calcul du discriminant** : $\Delta = b^2 - 4ac = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-53) = 1\,764$
  $\Delta > 0$, donc le polynôme s'annule deux fois :
  $$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-60 - \sqrt{1\,764}}{2 \times (-3)} = 17$$
  $$\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-60 + \sqrt{1\,764}}{2 \times (-3)} = 3$$

4. En déduire le tableau de variations **complet** de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 25].

On en déduit le tableau de variations :

x	0		3		17		25
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de B	-100	$\searrow$	-316	$\nearrow$	$1\,056$	$\searrow$	-800

On calcule : $B(0) = 0^3 + 30 \times 0^2 - 153 \times 0 - 100 = -100$

$B(3) = -3^3 + 30 \times 3^2 - 153 \times 3 - 100 = -316$

$B(17) = -17^3 + 30 \times 17^2 - 153 \times 17 - 100 = -1\,056$

$B(25) = -25^3 + 30 \times 25^2 - 153 \times 25 - 100 = -800$

5. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

Par lecture du tableau de variation, le bénéfice maximal est de 1 056 €. Il atteint pour une production de 17 pièces.

Partie C – Coût moyen

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle]0 ; 25] par $C_M = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. Calculer $C_M(16)$ et $C_M(17)$. *On arrondira au centime d'euro.*

$C_M(16) = \dfrac{C(16)}{16} = \dfrac{2\,916}{16} = 182{,}25$. Pour 16 pièces produites, la coût moyen est de 182,25 €.

$C_M(17) = \dfrac{C(17)}{17} = \dfrac{3143}{17} \approx 184{,}88$. Pour 17 pièces produites, la coût moyen est de 184,88 €.

2. On donne le tableau de variations de la fonction C_M :

x	0		15,2		25
variations de $C_M(x)$	‖	$\searrow$	181,6	$\nearrow$	279

L'affirmation suivante est-elle vraie ? « *Lorsque le bénéfice de l'entreprise augmente, le coût moyen diminue* ». Justifier la réponse.

En comparant les tableaux de variations des fonctions B et C_M, on remarque que le bénéfice augmente sur l'intervalle $[15{,}2\,;17]$ et sur cet intervalle le coût moyen augmente aussi… L'affirmation est donc fausse.

Exercice 4 — *6 points*

Les parties A, B et C de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A –

On s'intéresse au nombre de dons de sang lors de collectes organisées au sein de l'Établissement Français du Sang (EFS) depuis 2010.

Année	2010	2011	2012	2013	2014
Nombre de dons de sang (en milliers)	2 473	2 586	2 612	2 589	2 547

Source : site de l'EFS

1. Déterminer à 0,01 % près, le pourcentage d'augmentation de dons de sang entre 2010 et 2014.

   On calcule le pourcentage d'augmentation à l'aide de la formule :
   $$\frac{v_{2014}-v_{2010}}{v_{2010}} = \frac{2\,547-2\,473}{2\,473} \approx 0{,}030$$
   donc une augmentation de 3 %.

2. En déduire que l'augmentation annuelle moyenne entre 2010 et 2014 est de $0,74\,\%$ arrondie à $0,01\,\%$.

Entre 2010 et 2014 il y a eu 4 augmentations successives, l'augmentation moyenne t_m se calcule ainsi :
$(1+t_m)^4 = (1+0{,}03)$
$1+t_m = 1{,}03^{\frac{1}{4}}$
$1+t_m \approx 1{,}0074$
$t_m \approx 0{,}0074$
donc une augmentation moyenne d'environ $0{,}74\,\%$.

3. En supposant que l'augmentation du nombre de dons suivra la même évolution, combien de dons de sang peut-on espérer collecter en 2017 ? *On arrondira au millier.*

De 2014 à 2017 il y a aura trois augmentations successives de $0{,}74\,\%$.
Le nombre de dons en 2017 sera donc : $2\,547 \times \left(1+\dfrac{0{,}74}{100}\right)^3 \approx 2\,604$
Donc environ $2\,604$ milliers de dons.

Partie B –

Dans une région, $54\,\%$ des donneurs sont des hommes.

Parmi eux, $37\,\%$ ont moins de 40 ans.

Parmi les femmes donnant leur sang, $48\,\%$ ont moins de 40 ans.

On interroge au hasard un donneur de sang dans cette région et on considère les événements suivants :

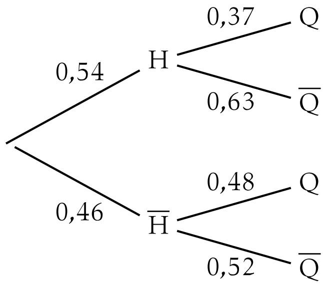
- H : « la personne interrogée est un homme »
- Q : « la personne interrogée a moins de 40 ans ».

$\overline{\mathrm{H}}$ désigne l'événement contraire de H et $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{Q})$ la probabilité de Q sachant H.

1. À l'aide de l'énoncé, donner $P(\mathrm{H})$ et $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{Q})$.

On sait que $54\,\%$ des donneurs sont des hommes, donc $P(\mathrm{H}) = 0{,}54$.
On sait aussi que parmi les hommes, $37\,\%$ ont moins de 40 ans, donc $P_{\mathrm{H}}(\mathrm{Q}) = 0{,}37$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré.



3. Calculer $P(H \cap Q)$. Interpréter le résultat obtenu.

   $P(H \cap Q) = P(H) \times P_H(Q) = 0{,}54 \times 0{,}37 = 0{,}199\,8$
   Environ 20 % des donneurs sont des hommes de moins de 40 ans.

4. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée ait moins de 40 ans est 0,420 6.

   On cherche $P(Q) = P(H \cap Q) + P(F \cap Q)$
   $P(Q) = 0{,}199\,8 + P(F) \times P_F(Q)$
   $P(Q) = 0{,}199\,8 + 0{,}46 \times 0{,}48$
   $P(Q) = 0{,}420\,6$
   Donc environ 42 % des donneurs de sang ont moins de 40 ans.

5. La personne interrogée a plus de 40 ans. Déterminer la probabilité que ce soit un homme. *On arrondira à* 10^{-4}.

   On cherche la probabilité que la personne interrogée soit un homme, sachant qu'elle a plus de 40 ans :
   $P_{\overline{Q}}(H) = \dfrac{P(H \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})}$, avec $P(\overline{Q}) = 1 - P(Q)$.
   $P_{\overline{Q}}(H) = \dfrac{0{,}54 \times 0{,}63}{0{,}579\,4} \approx 0{,}587\,2$.

Partie C –

L'EFS affirme que dans une région donnée : « 23 % de la population donne son sang au moins une fois par an ».

On interroge au hasard un échantillon de 1 000 personnes habitant cette région. Parmi elles, 254 ont donné au moins une fois leur sang au cours de la dernière année.

Peut-on mettre en doute l'affirmation de l'EFS ? Justifier la réponse à l'aide d'un intervalle de fluctuation.

On interroge 1 000 personnes, donc la taille de l'échantillon est $n = 1\,000$ (on a bien $n \geqslant 25$) ;
on connaît la proportion dans la population : $23\,\% = 0{,}23$ (on a $p \in [0{,}2\,;0{,}8]$
la fréquence observée f est $f = \dfrac{254}{1\,000} = 0{,}254$.
L'intervalle de fluctuation IF est donné par $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
Ici $p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}254 - \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}} \approx 0{,}22$ par défaut et $p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}254 + \dfrac{1}{\sqrt{1\,000}} \approx 0{,}29$ par excès.
On remarque que $0{,}23 \in$ IF, donc on ne remet pas en cause l'affirmation de l'EFS.