DEVOIR COMMUN DE MATHEMATIQUES

Première S

Durée de l'épreuve : **3 heures**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Aucun prêt de matériel (calculatrice, règle, …) n'est autorisé

Sujet A

Exercice 1 **(4 points)**

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué :

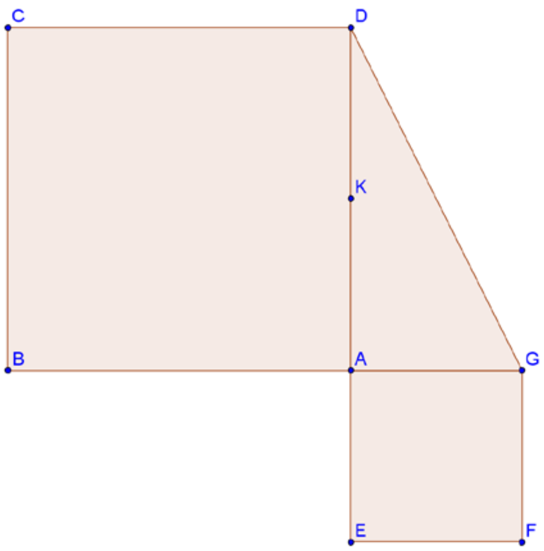
1) $8-\frac{16}{x}<x$ dans IR.

2) $x^4-21x^2=100$ dans IR

3) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

4) $|2x-3|=|7-2x|$ dans IR

Exercice 2 **(4 points)**



On considère la configuration ci-contre.
ADG est un triangle rectangle en A avec AG = 2cm et AD = 4cm.
On construit à l'extérieur de ADG les carrés ABCD et AEFG. Enfin K désigne le milieu de $[AD]$.

1) Justifier que le repère $\left(A;\overrightarrow{AG};\overrightarrow{AK}\right)$ est un repère orthonormé.
2) Déterminer les coordonnées du point C en justifiant.

On admet pour la suite que :
A(0;0) B(-2;0) D(0;2) E(0;-1) F(1 ;-1) G(1;0) K(0;1).

3) Déterminer par le calcul une équation de la droite (DG).
4) Démontrer que les droites (BE), (CF) et (DG) sont concourantes.

Exercice 3 **(4,5 points)**

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 400 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 7% des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 63 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	C est un nombre réel
Traitement :	Affecter à C la valeur 400
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $C < 500$ faire
	C prend la valeur $C - C \times 0,07 + 63$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 500$		vrai		...
Valeur de C	400	435		...
Valeur de n	0	1		...

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 400$ est le nombre de colonies en 2014.

a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.

b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 900 - C_n$. Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0,93 \times V_n$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 900 - 500 \times 0,93^{\,n}$.

d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?

b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur en utilisant la calculatrice.

Exercice 4 **(5 points)**

On considère un triangle ABC isocèle en A avec $AB = AC = 10$.

On souhaite déterminer la longueur de la base $[BC]$ pour que l'aire soit maximale et calculer cette aire.

1) Montrer que l'aire du triangle est $f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{100-\frac{x^2}{4}}$ où la longueur BC est notée $x \in [0;20]$.

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=x^2\left(100-\frac{x^2}{4}\right)$.

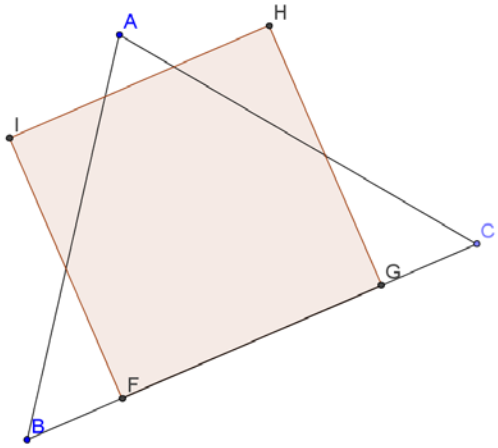
2) Démontrer que $g'(x)=x(200-x^2)$ pour tout $x \in$ IR.
3) Etudier les variations de la fonction g sur IR.
4) Démontrer que f a les mêmes variations que g.
5) Conclure.

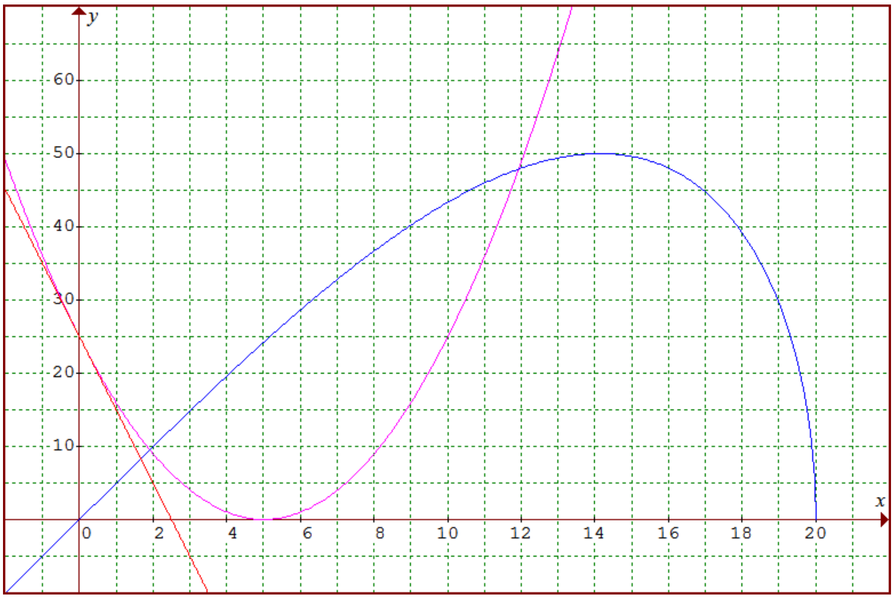
On considère un carré FGHI tel que F et G sont sur le segment [BC] et CG = BF = 2,5.

Son aire est notée $h(x)$.

Les fonctions *h* et *f* sont représentées ci-dessous. La droite est tangente à l'une des courbes.

6) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x l'aire du triangle est supérieure à celle du carré.
7) Déterminer graphiquement $h'(0)$.





Exercice 5 **(2,5 points)**

On considère une fonction *f* définie sur IR par $f(x)=x^3+ax+b$ où a et b sont des réels à déterminer.

$y = 9x - 8$ est l'équation réduite de la tangente à C_f (représentation graphique de *f*) au point d'abscisse 2.

Déterminer *a* et *b*. Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.

LYCEE E. BRONTE **ANNEE 2015-2016**

DEVOIR COMMUN DE MATHEMATIQUES

Première S

Durée de l'épreuve : **3 heures**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage d'une calculatrice est autorisé.

Aucun prêt de matériel (calculatrice, règle, …) n'est autorisé

Sujet B

Exercice 1 **(4 points)**

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué :

1) $6-\frac{9}{x}<x$ dans IR.

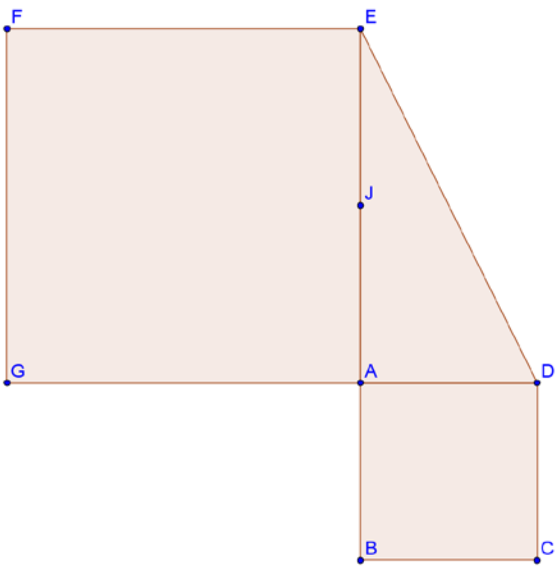
2) $x^4-7x^2=144$ dans IR

3) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\left]-\pi;\pi\right]$

4) $|5-2x|=|2x-9|$ dans IR

Exercice 2 **(4 points)**

On considère la configuration ci-contre.
ADE est un triangle rectangle en A avec AD = 2cm et AE = 4cm.
On construit à l'extérieur de ADE les carrés ABCD et AEFG. Enfin J désigne le milieu de $[AE]$.



1) Justifier que le repère $\left(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AJ}\right)$ est un repère orthonormé.
2) Déterminer les coordonnées du point F en justifiant.

On admet pour la suite que :
A(0;0) B(0;-1) C(1 ;-1) D(1;0) E(0;2) G(-2;0) J(0;1).

3) Déterminer par le calcul une équation de la droite (DE).
4) Démontrer que les droites (DE), (CF) et (BG) sont concourantes.

Exercice 3 **(4,5 points)**

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un nombre entier naturel
	C est un nombre réel
Traitement :	Affecter à C la valeur 300
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $C < 400$ faire
	C prend la valeur $C - C \times 0,08 + 50$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$		vrai		...
Valeur de C	300	326		...
Valeur de n	0	1		...

b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.

2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.

a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n.

b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$. Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.

d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?

3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.

a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?

b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur en utilisant la calculatrice.

Exercice 4 **(5 points)**

On considère un triangle ABC isocèle en A avec $AB = AC = 10$.
On souhaite déterminer la longueur de la base $[BC]$ pour que l'aire soit maximale et calculer cette aire.

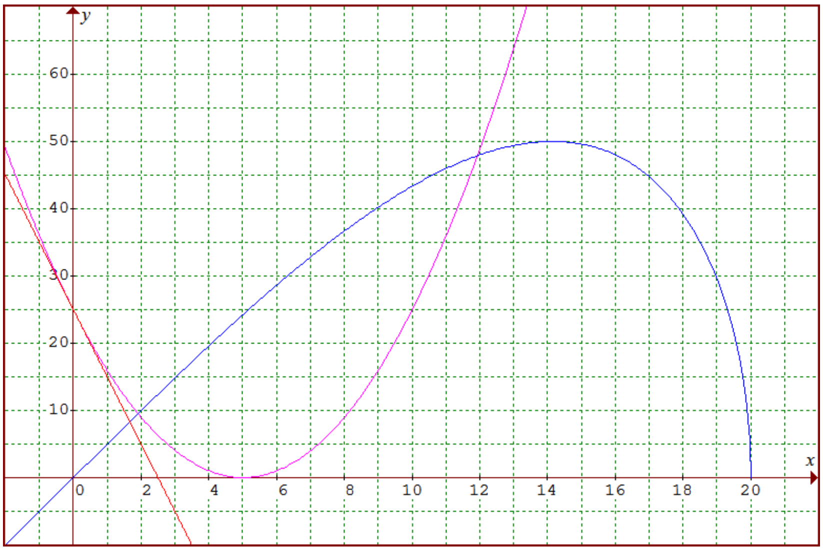
1) Montrer que l'aire du triangle est $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$ où la longueur BC est notée $x \in [0;20]$.

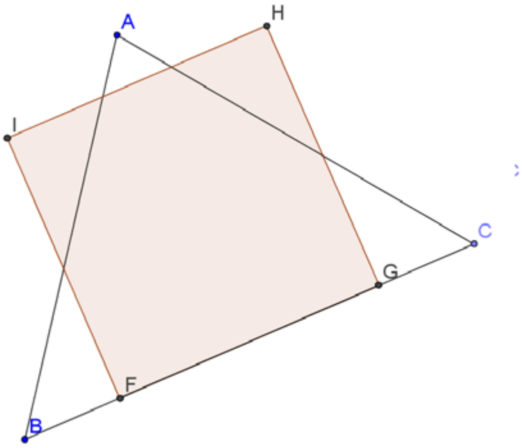
Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = x^2\left(100 - \frac{x^2}{4}\right)$.

2) Démontrer que $g'(x) = x(200 - x^2)$ pour tout $x \in$ IR.
3) Etudier les variations de la fonction g sur IR.
4) Démontrer que f a les mêmes variations que g.
5) Conclure.

On considère un carré FGHI tel que F et G sont sur le segment [BC] et CG = BF = 2,5.
Son aire est notée $h(x)$.
Les fonctions *h* et *f* sont représentées ci-dessous. La droite est tangente à l'une des courbes.

6) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x l'aire du triangle est supérieure à celle du carré.
7) Déterminer graphiquement $h'(0)$.





Exercice 5 **(2,5 points)**

On considère une fonction *f* définie sur IR par $f(x) = x^3 + ax + b$ où a et b sont des réels à déterminer.
$y = 8x - 9$ est l'équation réduite de la tangente à C_f (représentation graphique de *f*) au point d'abscisse 2.

Déterminer *a* et *b*. Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.