

**Numéro d'anonymat: .....**

**DEVOIR COMMUN DE MATHÉMATIQUES**

**Première S**

**Durée de l'épreuve : 3 heures**

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*L'usage d'une calculatrice est autorisé.*

*Énoncé à rendre avec la copie (n'oubliez pas de l'anonymiser)*

**Aucun prêt de matériel (calculatrice, règle, ...) n'est autorisé**

**Exercice 1                      suite arithmético-géométrique                      points**

Dans une entreprise, les commerciaux ont le choix des services de téléphone mobile exclusivement entre deux opérateurs concurrents : A et B.

On s'intéresse aux parts de marché de ces deux opérateurs chez les commerciaux de cette entreprise. Chaque commercial dispose d'un seul abonnement chez l'un ou l'autre des opérateurs : A et B.

Les abonnements sont souscrits pour une période d'un an, à partir du 1<sup>er</sup> janvier.

Une statistique, menée sur les choix des commerciaux, a montré que :

- parmi les abonnés de l'opérateur A, 18 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur ;
- parmi les abonnés de l'opérateur B, 22 % d'entre eux, en fin d'année, changent d'opérateur ;

On admet que les mouvements d'abonnés d'un opérateur à l'autre se poursuivront dans ces proportions dans les années à venir. De plus, on sait qu'au 1<sup>er</sup> janvier 2014, 40% des commerciaux avaient souscrit un abonnement A et 60% chez B. On note, pour tout entier naturel  $n$  :

- $U_n$  la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez A au 1<sup>er</sup> janvier 2014+  $n$
- $V_n$  la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez B au 1<sup>er</sup> janvier 2014+  $n$

On a donc  $U_0 = 0,4$  et  $V_0 = 0,6$

- 1) Calculer  $U_1$  et  $V_1$ .
- 2) Justifier que  $U_{n+1} = 0,82 U_n + 0,22 V_n$  et que  $U_n + V_n = 1$
- 3) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = 0,6 U_n + 0,22$
- 4) On considère la suite  $(W_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$ , par  $W_n = U_n - 0,55$ 
  - (a) Calculer le premier terme  $W_0$ .
  - (b) Montrer que  $(W_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,6$ .
  - (c) En déduire l'expression de  $W_n$  en fonction de  $n$ .

- (d) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = 0,55 - 0,15 \times (0,6)^n$ .
- (e) Déterminer la proportion de commerciaux disposant d'un abonnement chez l'opérateur A, au 1<sup>er</sup> janvier 2021. (Vous donnerez une valeur approchée à  $10^{-3}$  près).
- 5) Conjecturer la limite de la suite  $(U_n)$ . Comment interpréter ce résultat sur l'évolution des parts de marché dans les années futures.

**Exercice 2** VRAI ou FAUX ? **points**

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 5x - 4$  et  $g(x) = -2x + 2$

La courbe de  $f$  est au-dessus de la courbe de  $g$  sur l'intervalle  $[1 ; 2]$ .

Vrai ou Faux ? Vous justifierez votre réponse.

**Exercice 3** suites et algorithmes **points**

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $U_0 = \frac{1}{5}$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = \frac{2+U_n}{1+2U_n}$

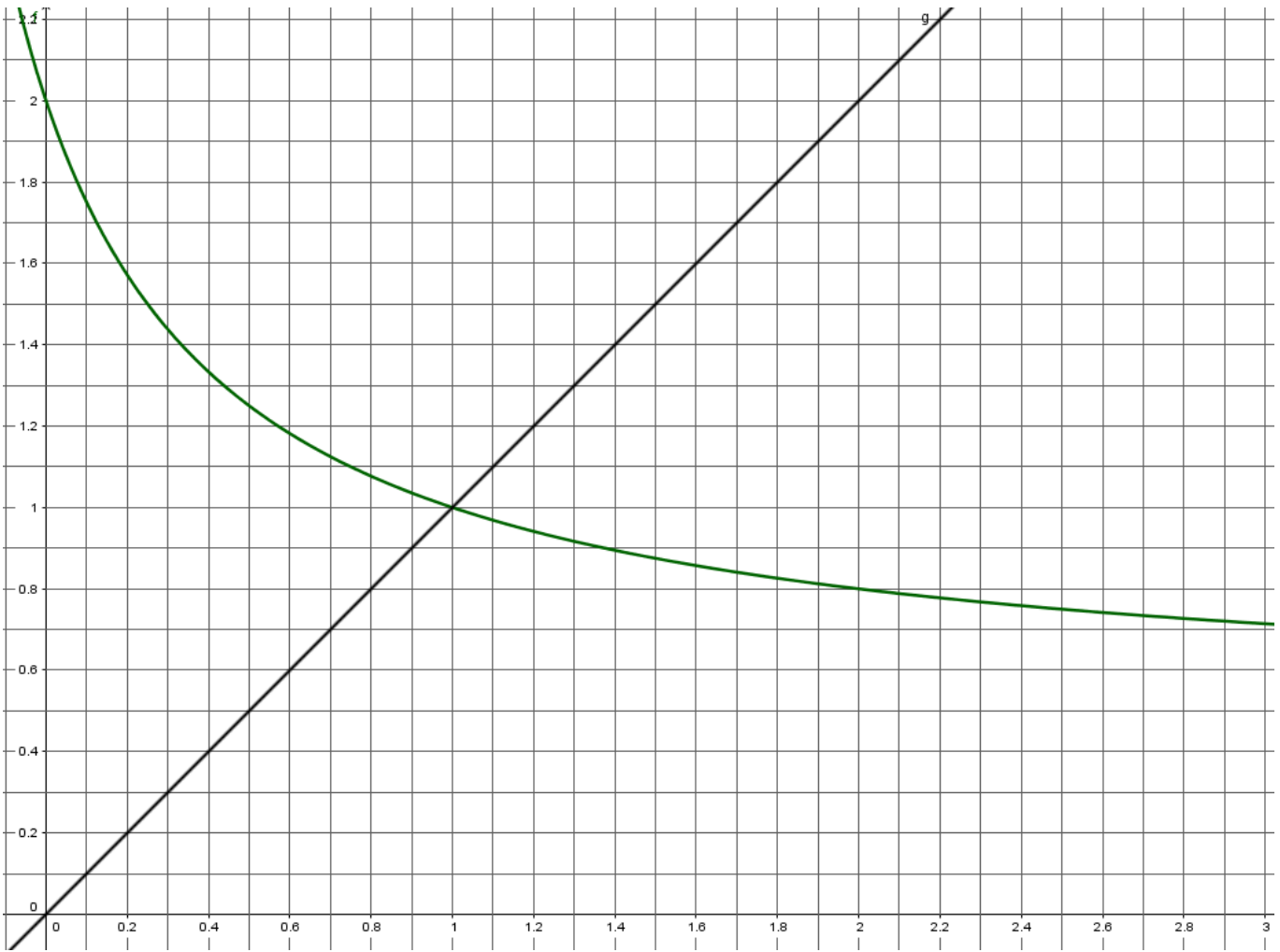
On considère la fonction  $g$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{2+x}{1+2x}$

On a tracé, **page 3**, dans un repère orthonormé la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  et la courbe  $(C)$ , courbe représentative de la fonction  $g$ .

- 1) (a) Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe les termes  $u_0, u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  de la suite  $(u_n)$  en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.  
 (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et la limite de la suite  $(u_n)$ .
- 2) Calculer les valeurs exactes de  $u_1$  et  $u_2$ .
- 3) Compléter sur cette feuille les algorithmes suivants sachant que :
  - l'**algorithme 1** permet d'afficher un terme quelconque de la suite  $(U_n)$
  - l'**algorithme 2** permet d'afficher le plus petit entier  $n$  tel que  $|U_n - 1| < 10^{-3}$

Algorithme 1	Algorithme 2
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saisir un entier naturel <math>n \geq 0</math>.</li> <li>• U prend la valeur .....</li> <li>• Pour i variant de .... à ..... faire               <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ..... prend la valeur .....</li> </ul> </li> <li>• Fin Pour</li> <li>• Afficher .....</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• n prend la valeur .....</li> <li>• U prend la valeur .....</li> <li>• Tant que ..... faire               <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ ..... prend la valeur .....</li> <li>➤ ..... prend la valeur .....</li> </ul> </li> <li>• Fin Tant que</li> <li>• Afficher .....</li> </ul>

- 4) Déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $|U_n - 1| < 10^{-3}$  ( On pourra utiliser l'algorithme précédent ou toute autre méthode ).



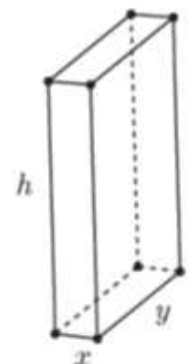
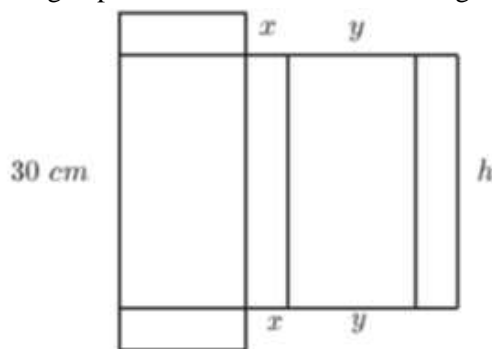
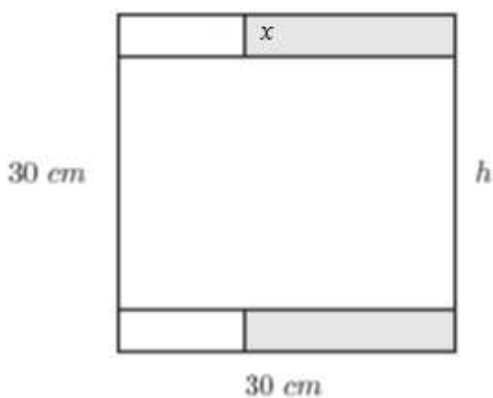
question 1.a) de l'exercice 3

**Exercice 4**      **étude de fonction**      **points**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 15]$  par  $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x - 500$ .

- 1) (a) Calculer  $f'(x)$  pour  $x \in [0 ; 15]$ .  
 (b) Etudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; 15]$ .  
 (c) A l'aide du tableau de variation, donner le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 0$  dans  $[0 ; 15]$ .  
 Donner des valeurs approchées, à  $10^{-1}$  près, de ces solutions.

- 2) Un fabricant envisage la production de boîtes en forme de pavé droit pour emballer des clous en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille de carton carrée.  
 Le côté de la feuille mesure 30 cm et on désigne par  $x$  la mesure en cm de la largeur des bandes découpées.



- (a) Dans quel intervalle varie  $x$  ?

- (b) Calculer le volume de la boîte pour  $x = 2$ .
- (c) Justifier que le volume  $V(x)$  de la boîte est  $V(x) = (15 - x)(30 - 2x)x$ .
- (d) Vérifier que le volume  $V(x)$  est égal à  $f(x) + 500$  où  $f$  est la fonction définie précédemment.
- (e) En déduire, en justifiant, le tableau de variation complet de  $V$  puis la valeur de  $x$  pour laquelle le volume est maximal. Préciser alors la valeur du volume maximal.

3) Le fabricant veut des boîtes d'une capacité de 0,5 L. Combien a-t-il de possibilités ? Justifier.

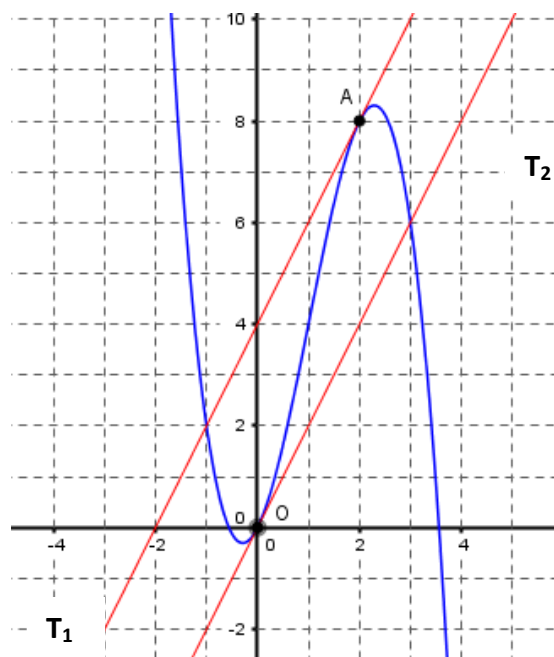
### Exercice 5                      Questions sur différents thèmes                      points

*Les cinq questions sont indépendantes.*

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^4 + x^2 - 56 = 0$
  
- 2) soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n^2}$ 
  - a) montrer que la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = u_n^2$  est arithmétique.
  - b) en déduire une expression de  $V_n$  puis de  $u_n$  en fonction de  $n$
  
- 3) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre de solutions des équations suivantes :
 
$$(m - 3)x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

Bonus : déterminer les valeurs des solutions.
  
- 4) Soit la fonction  $f$  définie par:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$ . Donner une équation de la tangente  $T$  à la courbe de  $f$  au point d'abscisse 3.
  
- 5) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2|x| - x - 6 = 0$

### Exercice 6                      problème ouvert                      points



*Dans cet exercice, toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.*

On a tracé ci-contre la représentation graphique d'une fonction  $f$  ainsi que deux tangentes  $T_1$  et  $T_2$  à la courbe de  $f$ .

On admet que la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Déterminer les valeurs des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$ .