correction			20
ANT	1.1 connaissance de la fonction carré		1
CAL	solution		1
ANT	1.2 connaissance de la fonction inverse		1
CAL	solution		1
FCT03	1.3 connaissance de la fonction valeur absolue		1
CAL	solution		1
FCT03	1.4 interpréter valeur absolue / distance		1
REP	solution		1
	total	8	
RAI	2.a trouver contre-exemple		1,5
RAI	2.b connaissance de la fonction carrée		1,5
	total	3	
FCT03	3.A.1 justifier ens def racine carrée		1
CAL	ens. Def = R		0,5
REP	3.A.2 représentation graphique à l'aide de calculatrice		1,5
FCT04	3.B.1 démontrer variations : interpréter hypothèses		1
FCT04	conclusion		1
FCT04	3.B.2 démontrer variations de sqrt(u)		1
FCT04	conclusion		1
FCT03	3.C.1 simplification sqrt en valeur absolue		0,5
FCT03	3.C.2 justifier écriture sans val abs		0,5
ANT	interpréter fct affine = droite		1
	total	9	

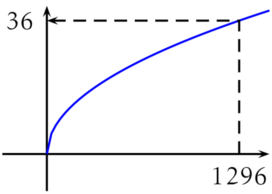
C01

NOM ....- Date de naissance ....

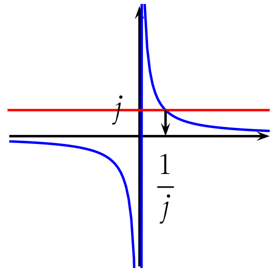
Exercice 1 — Résolution d'inéquation *8 points*

Résoudre les inéquations suivantes (justifier au choix par un graphique ou un calcul). Remplacer j par votre jour de naissance.

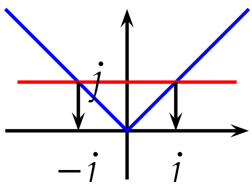
$\sqrt{x} \leqslant 36$ $\qquad \dfrac{1}{x} < j$ $\qquad |x| > j$ $\qquad |x-3| \leqslant j$



donc $x \in [0,;6]$



donc $x \in]-\infty,;0[\cup]\frac{1}{j};+\infty[$



donc $x \in]-\infty,;-j[\cup]j+\infty[$

la distance entre le point M d'abscisse x et celle du point A d'abscisse 3 doit être inférieure à j.

donc

$-j \leqslant x-3 \leqslant j$

$\Leftrightarrow 3-j \leqslant x \leqslant j+3$

soit

$x \in [3-j;3+j]$

Exercice 2 — Démonstrations

3 points

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, démontrer la, sinon donner un contre exemple.

a) le produit de deux fonctions affines croissantes sur $\mathbb{R}$ est une fonction croissante.

FAUX : soit $f(x) = x$ et $g(x) = x$, toutes deux croissantes sur $\mathbb{R}$,
mais $(fg)(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$

b) si deux réels a et b sont tels que $a < b$, alors $a^2 < b^2$.

FAUX : si $a = -4$ et $b = 3$, on a $a < b$, mais $a^2 = (-4)^2 = 16$ qui est supérieur à $b^2 = 3^2 = 9$!

Exercice 3 — Plouf

9 points

Suite à une obscure histoire de drone, le petit Samuel doit étudier la fonction suivante : $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x-1)^2+m}$ où m est le numéro de votre mois de naissance.

(Pour ceux qui sont nés en janvier, la fonction est : $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x-1)^2+1}$, pour ceux qui sont né en février : $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x-1)^2+2}$... pour ceux qui sont né en septembre : $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x-1)^2+9}$...)

Partie A – Représentation graphique

1. Quel est l'ensemble de définition de *votre* fonction f ? Justifier.

l'expression sous le radical doit être positive, or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$ et $(x-1)^2 + m > 0$, donc on peut calculer les deux racines carrées : l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. À l'aide de votre calculatrice, dessiner la représentation graphique de la fonction dans le graphique (ne prendre que cinq ou six points).

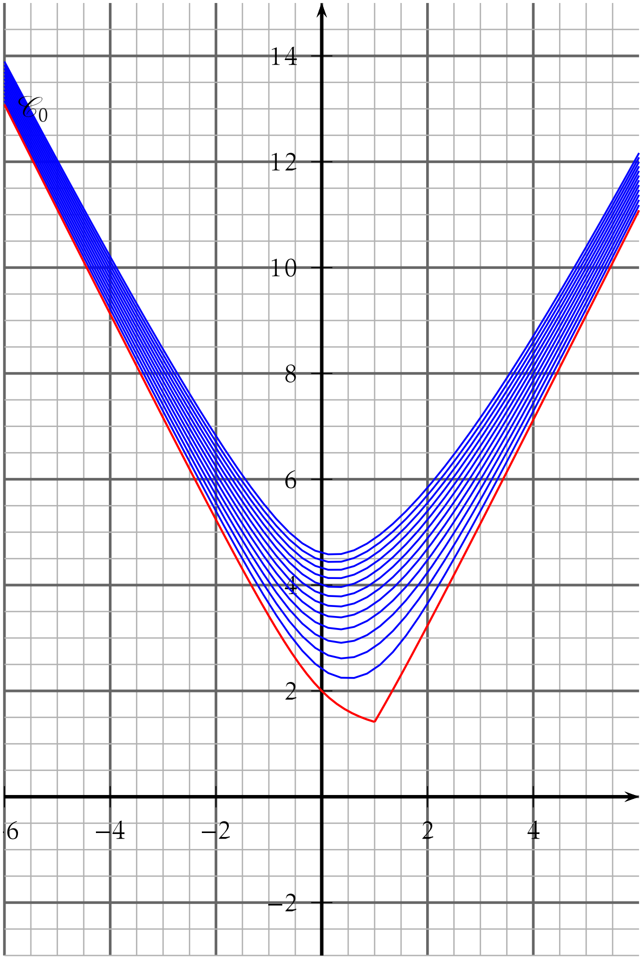


Figure 1 – Graphique pour tracer la fonction $f(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x-1)^2+m}$

Partie B – Variations

1. Démontrer le théorème suivant : *la somme de deux fonctions croissantes sur* $\mathbb{R}$ *est une fonction croissante sur* $\mathbb{R}$.

   soient f et g deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$, alors par définition, pour tout réels a et b tels que $a < b$, on a :

   $$\begin{array}{ccc} f(a) & < & f(b) \\ g(a) & < & g(b) \\ \hline (f+g)(a) & < & (f+g)(b) \end{array}$$

   donc $a < b$ implique $(f+g)(a) < (f+g)(b)$; l'ordre est conservé, la fonction $(f+g)$ est croissante.

2. Vous *admettrez* que les fonctions u et v, définies sur $[1\,;+\infty[$ par
   - $u(x) = 1 + x^2$ et
   - $v(x) = \sqrt{(x-1)^2 + m}$ (où m est le numéro de votre mois de naissance)

   sont croissantes sur $[1\,;+\infty[$.

   Démontrer que *votre* fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

   $x \in [1\,;+\infty[$, donc $u(1) = 2$ et comme la fonction u est croissante,
   $u(x) \geqslant u(1) \geqslant 1$.
   La fonction racine carrée est croissante sur $[1\,;+\infty[$,
   donc la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

   $\sqrt{u}$ et v sont donc deux fonctions croissantes sur $[1\,;+\infty[$, leur somme est une fonction croissante sur $[1\,;+\infty[$, c'est à dire la fonction f est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

Partie C – Étude d'un cas particulier

Dans cette partie, on pose $m = 0$, la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par

$f_0(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x-1)^2}$.

1. Samuel pense qu'il peut simplifier l'expression de la fonction f_0 en n'utilisant qu'une seule racine carrée. Si vous pensez qu'il a raison, donner une autre expression de la fonction, sinon expliquez pourquoi ce n'est pas possible.

   $f_0(x) = \sqrt{1+x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{1+x^2} + |x-1|$

2. Samuel obtient le graphe de la fonction f_0 à l'aide de sa calculatrice. Il lui semble que sur $[1\,;+\infty[$ la représentation graphique est une droite. Infirmer ou confirmer cette conjecture.

Sur $[1\,;+\infty[$, $x-1 \geqslant 0$, donc $|x-1| = x-1$.
l'expression de f_0 est donc : $f_0(x) = \sqrt{1+x^2}+x-1$, ce *n'est pas* l'expression d'une fonction affine, donc ce n'est pas une droite !