C02

NOM ....- Mois de naissance ....

23 points possibles, mais note sur 20.
Pour tous les exercices de ce contrôle, m représente le numéro de votre mois de naissance. Il faut remplacer m par sa valeur avant de commencer l'exercice !

Exercice 1 — Variations

2 points

Donner les variations de la fonction $f : x \mapsto -3(x+m)^2 - 4$ sur $\mathbb{R}$.

Justifier à l'aide de phrases et / ou d'un tableau expliquant votre démarche.

J'ai vérifié ma réponse en traçant le graphe de la fonction f à l'aide de ma calculatrice ☐ oui ☐ non

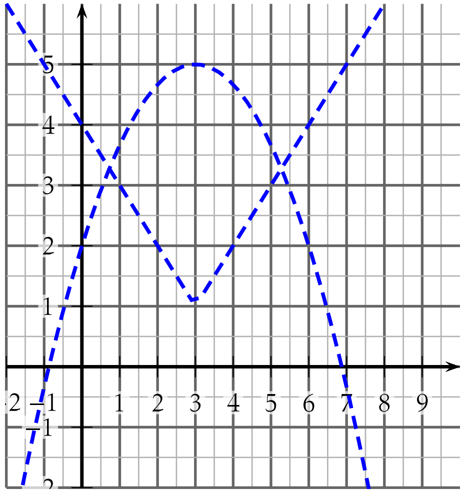
idée 1 :

x	$-\infty$	$-m$	$+\infty$
signe de $x+m$	$-$	0	$+$
variation de $(x+m)^2$	$\searrow$		$\nearrow$
variation de $-3(x+m)^2$	$\nearrow$		$\searrow$
variation de f	$\nearrow$		$\searrow$

idée 2 :
f est la forme canonique d'un polynôme du second degré ;
en posant $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ on trouve $a = -3$, donc la parabole est « orientée vers le bas » ; comme $\alpha = -m$ est l'abscisse du sommet, on en déduit que f est croissante sur $]-\infty ; -m]$ et décroissante sur $[-m ; +\infty[$.

Exercice 2 — Fonctions composées *6 points*

Pour construire son fantôme, Arnufle a commencé par construire la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$, puis il a multiplié f par un nombre et enfin il a translaté la courbe obtenue.
Il a ensuite dessiné la bouche en translatant la fonction $g : x \mapsto |x|$.
À l'aide d'une lecture graphique, en expliquant votre démarche, déterminer l'équation de la parabole ; puis celle de la bouche.



J'ai vérifié ma réponse en traçant les graphes des fonctions f et g à l'aide de ma calculatrice ☐ oui ☐ non

- On a vu que si le graphe d'une fonction g est l'image de celui d'une fonction f par la translation de vecteur de coordonnées $(\alpha ; \beta)$, alors $g(x) = f(x-\alpha)+\beta$.
- On sait que $f_1(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$.
  On lit les coordonnées du sommet de la parabole : $(3;5)$, ce sont les coordonnées du vecteur translation, donc $\alpha = 3$ et $\beta = 5$; d'où $f_1(x) = a(x-3)^2+5$
  On lit $f_1(0) = 2$, donc $2 = 9a+5 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$
  donc $f_1(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2+5$
- On sait que $g_1(x) = |x-\alpha|+\beta$.
  On en déduit que $\alpha = 3$ et $\beta = 1$, d'où $g_1(x) = |x-3|+1$

Exercice 3 — Calculs

6 points

a) En détaillant, résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 = 1 + x$.

$x^2 = 1 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

on reconnaît une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec : $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$

comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions : $\alpha = \dfrac{-(-1) - \sqrt{5}}{2 \times 1} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{-(-1) + \sqrt{5}}{2 \times 1} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

culture : le nombre $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ se note φ et s'appelle le « nombre d'or » !

b) En détaillant, résoudre dans $\mathbb{R}$: $x + \sqrt{x \times (1 + m - x)} = 1$ (m est le numéro de votre mois de naissance).

cas général : $x + \sqrt{x \times (1 + m - x)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x \times (1 + m - x)} = 1 - x \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1 - x \geqslant 0 \\ x \times (1 + m - x) = (1 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 1 \\ (1 + m)x - x^2 - x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leqslant 1 \\ -2x^2 + (3 + m)x - 1 = 0 \end{cases}$$

on reconnaît une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec : $a = -2$, $b = 3 + m$ et $c = -1$.

$\Delta = (3 + m)^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = (3 + m)^2 - 8$

mais comme $m \geqslant 1$, on a toujours $\Delta > 0$.

L'équation admet donc deux solutions :

m	1	2	3	4	5	6
x_1	$-\sqrt{2} + 2$	$\frac{-\sqrt{17}+5}{2}$	$-\sqrt{7} + 3$	$\frac{-\sqrt{41}+7}{2}$	$-\sqrt{14} + 4$	$\frac{-\sqrt{73}+9}{2}$
x_2	$\sqrt{2} + 2$	$\frac{\sqrt{17}+5}{2}$	$\sqrt{7} + 3$	$\frac{\sqrt{41}+7}{2}$	$\sqrt{14} + 4$	$\frac{\sqrt{73}+9}{2}$

m	7	8	9	10	11	12
x_1	$-\sqrt{23} + 5$	$\frac{-\sqrt{113}+11}{2}$	$-\sqrt{34} + 6$	$\frac{-\sqrt{161}+13}{2}$	$-\sqrt{47} + 7$	$\frac{-\sqrt{217}+15}{2}$
x_2	$\sqrt{23} + 5$	$\frac{\sqrt{113}+11}{2}$	$\sqrt{34} + 6$	$\frac{\sqrt{161}+13}{2}$	$\sqrt{47} + 7$	$\frac{\sqrt{217}+15}{2}$

Mais il faut aussi $x \leqslant 1$! Donc au final l'équation n'admet qu'une solution (la première ligne du tableau).

J'ai vérifié mes réponses à l'aide de ma calculatrice ☐ oui
☐ non

Exercice 4 — Problème dans un parc *8 points*

Arnufle et ses amis jouent au ballon sur la base de Vaires. La balle arrivant sur lui, Arnufle saute en l'air, et renvoie le ballon de la tête : ce dernier décrit une magnifique parabole avant de retomber sur le drone de Samuel qui flottait encore à la surface de l'eau...

Voici l'équation de la parabole décrite par le ballon : (elle donne la hauteur de la balle (en mètres) en fonction du temps (en secondes))

$h(t) = 2{,}5 + 0{,}375t - 0{,}0625t^2$.

1. À quelle hauteur était le ballon au moment où Arnufle l'a renvoyé ?
   cela correspond à $t = 0$, on a $h(0) = 2{,}5$, donc l'impact a eu lieu à 2,5 m du sol.
2. Quelle est la hauteur maximale atteinte par le ballon ? Combien de temps a-t-il mis pour atteindre cette hauteur ?
   L'équation est celle d'une parabole orientée « vers le bas » car le coefficient de x^2 est négatif.
   Le sommet de la parabole est donc le maximum et il a pour abscisse $t_{max} = -\dfrac{b}{2a}$.
   Ici $a = -0{,}0625$ et $b = 0{,}375$; donc $t_{max} = \dfrac{0{,}375}{2 \times 0{,}0625} = 3$.
   Le ballon atteint sa hauteur maximale en 3 secondes.
   Comme $h(3) = 3{,}0625$, la hauteur max est d'environ 3 mètres.

3. Combien de temps le ballon est-il resté en l'air avant de retomber sur le drone ?

On cherche t tel que $h(t) = 0$
$\Leftrightarrow 2{,}5 + 0{,}375t - 0{,}0625t^2 = 0$.
on reconnaît une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :
$a = -0{,}0625$, $b = 0{,}375$ et $c = 2{,}5$.
$\Delta = 0{,}375^2 - 4 \times (-0{,}0625) \times 2{,}5 = 0{,}765625$
donc $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes :
$t_1 = \dfrac{-0{,}375 - \sqrt{0{,}765625}}{2 \times -0{,}0625} = 10$ et $t_2 = \dfrac{-0{,}375 + \sqrt{0{,}765625}}{2 \times -0{,}0625} = -4$
Comme le temps est forcément positif, on en conclu que le ballon a mis 10 secondes a atteindre le drone.

4. Ce modèle vous semble-t-il réaliste ?

Après quelques recherches sur Internet *record football tête la plus longue*, je trouve un but marquée d'une frappe à la tête d'une cinquantaine de mètres et l'action ne dure moins de 2 secondes...

J'ai vérifié mes réponses en traçant le graphe de la fonction h à l'aide de ma calculatrice ☐ oui ☐ non