C05

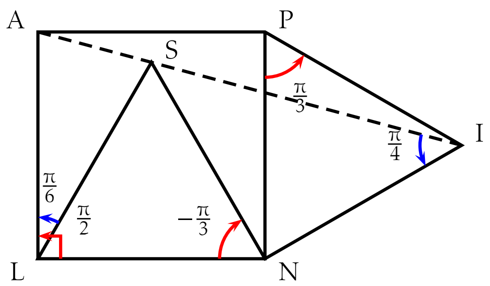
NOM ....- Mois de naissance ....

Exercice 1 — LAPINS

8,5 points

1. Construire la figure suivante avec des instruments ou à main levée en respectant globalement les proportions.

- LAPN est un carré tel que $\left(\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{LA}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
- LNS est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{NS}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$
- PNI est un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PI}\right) = \dfrac{\pi}{3}$



2. Les points A, S et I semblent alignés : démontrer si cela est vrai ou non en utilisant les angles de vecteurs.
Vous pourrez calculer $\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SI}\right)$ en remarquant que
$\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SI}\right) = \left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SL}\right) + \left(\overrightarrow{SL}, \overrightarrow{SN}\right) + \left(\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SI}\right)$.

- $\left(\overrightarrow{LS}, \overrightarrow{LA}\right) = \left(\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{LA}\right) - \left(\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{LS}\right)$
  or LNS équilatéral, donc $\left(\overrightarrow{LN}, \overrightarrow{LS}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
  d'où $\left(\overrightarrow{LS}, \overrightarrow{LA}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$
- LNS est équilatéral, donc LS = LN ;
  LAPN est un carré, donc LN = LA ;
  d'où LS = LA : le triangle LAS est isocèle en L.

donc $\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SL}\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \left(\overrightarrow{LS}, \overrightarrow{LA}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12}$

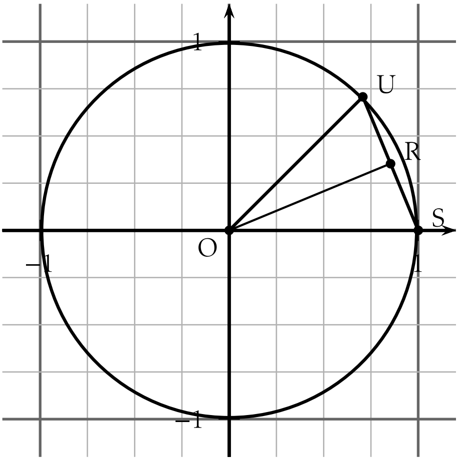
- NPI est équilatéral, donc NI = NP ;
  LNS est équilatéral, donc NS = LN,
  or LN = NP car LAPN est un carré
  donc NI = NS, NSI est donc un triangle isocèle en N.
- NPI est équilatéral, donc $\left(\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{NP}\right) = \frac{\pi}{3}$
  $\left(\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{NS}\right) = \left(\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{NP}\right) + \left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NL}\right) + \left(\overrightarrow{NL}, \overrightarrow{NS}\right)$
  $= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$
  le triangle NSI est donc rectangle isocèle en N.
  on en déduit que $\left(\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SI}\right) = \frac{\pi}{4}$
- $\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SI}\right) = \left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SL}\right) + \left(\overrightarrow{SL}, \overrightarrow{SN}\right) + \left(\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SI}\right)$
  $= \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi$
  donc les points L, S et I sont alignés.

3. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{LN}\right)$.

$\left(\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{LN}\right) = \left(\overrightarrow{IS}, \overrightarrow{IN}\right) + \left(\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{LN}\right)$
$= \frac{\pi}{4} + \left(\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{NL}\right) = \frac{\pi}{4} + \left(\overrightarrow{NI}, \overrightarrow{NS}\right) + \left(\overrightarrow{NS}, \overrightarrow{NL}\right)$
$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}$
remarque : la mesure principale est donc $-\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 2 — OURS

8,5 points



Le repère est orthonormé, le cercle est de centre O et de rayon 1 ; $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OU}\right) = \dfrac{\pi}{4}$; R est le milieu de [US].

1. Que représente la droite (OR) dans le triangle SOU ? Justifier.
En déduire une mesure de $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OR}\right)$

Le triangle SOU est isocèle en O, R est le milieu de [OS] donc (OR) est la médiane issue de O, mais comme O est le sommet principal, (OR) est aussi la hauteur, la médiatrice et la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OU}\right)$.
donc $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OR}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OU}\right) = \dfrac{\pi}{8}$

2. Donner les coordonnées du point U dans le repère.

On sait que $\left(\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OU}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, donc $x_U = y_U = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. En déduire que $RS = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

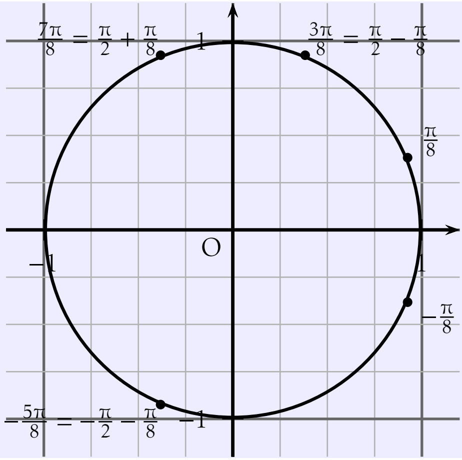
$$RS = \frac{1}{2}US = \frac{1}{2}\sqrt{(x_S - x_U)^2 + (y_S - y_U)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

4. Á l'aide la question précédente, donner les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Dans le triangle ROS rectangle en R :
$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{RS}{OS} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
À l'aide de la formule $\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$,
on trouve $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
(on sait que le cosinus est positif car $\frac{\pi}{8}$ est dans le premier cadran.)

5. Donner en justifiant, la mesure principale de $\frac{(7+4m)\pi}{8}$, puis déterminer les valeurs exactes de son sinus et de son cosinus (m représente le numéro de votre mois de naissance).

mois	1	2	3	4	5	6
angle	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{19\pi}{8}$	$\frac{23\pi}{8}$	$\frac{27\pi}{8}$	$\frac{31\pi}{8}$
mesure princ.	$-\frac{5}{8}\pi$	$-\frac{1}{8}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	$-\frac{5}{8}\pi$	$-\frac{1}{8}\pi$
sin	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
cos	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
mois	7	8	9	10	11	12
angle	$\frac{35\pi}{8}$	$\frac{39\pi}{8}$	$\frac{43\pi}{8}$	$\frac{47\pi}{8}$	$\frac{51\pi}{8}$	$\frac{55\pi}{8}$
mesure princ.	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	$-\frac{5}{8}\pi$	$-\frac{1}{8}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$
sin	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$



Exercice 3 — Équations

3 points

1. Résoudre dans $[0\,;2\pi[$: $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$

on trouve $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = \dfrac{2\pi}{2} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$

donc les solutions sont $x = \dfrac{2\pi}{3}$ et $x = \dfrac{4\pi}{3}$

2. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$: $\sin(3x) = 0$

on trouve $3x = 0 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 0 + k\dfrac{\pi}{3}$

donc les solutions appartiennent à $\left\{-\dfrac{2\pi}{3}\,;-\dfrac{\pi}{3};0;\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\,;\pi\right\}$