# ___oO° Devoir commun 1ere S °Oo___

20 points (prise en compte de rédaction générale) – 3 heures

Sujet à rendre avec la copie    Numéro d'anonymat : ................

Les calculatrices scientifiques sont autorisées à condition d'être en **mode examen**.

Vous devez mettre votre calculatrice en mode examen devant le surveillant de salle, lorsqu'il vous le demande (généralement lors l'émargement de la feuille de présence).

| pour les Casio | pour les Texas Instrument |
|---|---|
| calculatrice **éteinte**, appuyer simultanément sur les trois touches suivantes : cos, 7, AC puis suivre les instructions affichées. | calculatrice **éteinte**, appuyer simultanément sur les trois touches suivantes : AC, enter, ON |

À la mise en place du mode examen, une diode clignote à l'avant de la machine et un symbole s'affiche en haut de l'écran.

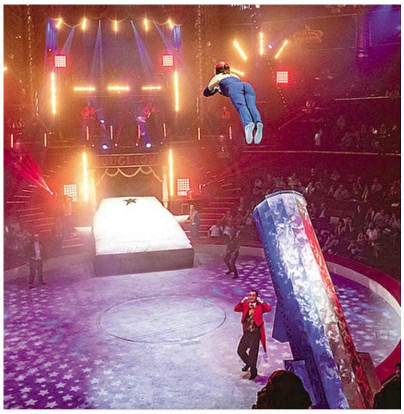
Si votre machine est déjà en mode examen, vous devez quand même effectuer la mise en mode examen devant le surveillant de salle.

## Exercice 1 — Robin Valencia

*5 points*

une vidéo : *https://www.youtube.com/watch?v=defO6y8DVAs*

L'Américaine Robin Valencia fait revivre un numéro historique au Cirque d'Hiver jusqu'au 11 mars 2018 : *Human Canonball*.
L'origine de ce numéro remonterait à l'Angleterre du XIXe siècle : à une vitesse folle, la jeune femme est propulsée dans les airs à l'aide d'un engin construit sur mesure et utilisé par son oncle mathématicien (ce dernier a battu ainsi un record de portée).
Robin Valencia est placé dans le fût d'un canon et propulsé sur un « matelas » disposé pour l'accueillir. Encore faut-il le mettre au bon endroit !
On modélise le début de la trajectoire de Robin Valencia un arc de parabole.
On note $f(x)$ la hauteur (en mètres) de « la femme-canon » en fonction de la distance au sol (en mètres).
Elle sort du canon à une hauteur de 2 mètres.
La fonction $f$ est modélisée à l'aide d'un polynôme du second degré.



*http ://tweetstalker.com/TeleramaSortir*

1. À l'aide d'une lecture graphique, en expliquant votre démarche donner le nombre dérivé en 0.

Le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente.
$f'(0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2}{1} = 2$

2. À l'aide d'une lecture graphique et de vos connaissance, déterminer une expression de la fonction $f$.

$f$ est un polynôme du second degré, son expression est de la forme $z(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On lit l'ordonnée à l'origine : 2, donc $c = 2$.
On lit les coordonnées du sommet $(4;6)$, donc

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 4 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8a \\ b^2 - 4a \times 2 = -24a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8a \\ 64a^2 + 16a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8a \\ 16a(4a+1) = 0 \end{cases}$$

Or $a \neq 0$, donc $a = -\dfrac{1}{4}$ et $b = 2$

d'où $f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2 + 2x + 2$

3. Donner l'équation de la tangente à courbe au point d'abscisse 0.

On sait que l'équation de la tangente est de la forme $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ ;
On a $f(x) = -\frac{1}{4}x^2+2x+2$, donc $f'(x) = -\frac{1}{4}\times 2x+2 = -\frac{1}{2}x+2$
pour $a = 0$ on trouve $y = f'(0)\times x + f(0) = 2x+2$

4. Calculer la distance que Robin Valencia aura parcourue avant de retomber sur le matelas (au niveau du sol). Arrondir au décimètre près.

On cherche $x$ (positif) tel que $z(x) = 0$
$-\frac{1}{4}x^2+2x+2=0$
$\Delta = 2^2 - 4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times 2 = 6$
les solutions sont donc $\alpha = \dfrac{-2-\sqrt{6}}{2\times\left(-\frac{1}{4}\right)} = 4+2\sqrt{6} \approx 8{,}9$
et $\beta = 4-2\sqrt{6} \approx -0{,}9$
Comme on ne veut que la solution positive : elle retombe à environ 8,9 m de son point de départ.

5. Des physiciens, avec l'aide d'amis mathématiciens, ont établi que l'équation donnant la hauteur en fonction de la distance au sol d'un projectile propulsé avec une vitesse initiale $V_0$ suivant un angle $\phi$ à une hauteur $h_0$ est donnée par :

$$f(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2}x^2\left(1+\tan^2(\phi)\right)+x\tan(\phi)+h_0$$

où $g \approx 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, et la hauteur et la distance au sol sont en mètres, la vitesse en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Grâce à l'équation trouvée en 2, calculer la vitesse initiale $V_0$ (en $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$). *En réalité, la vitesse initiale est d'environ* $70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, *mais bon, c'est un énoncé de maths ;-)*

On identifie les coefficients : $\begin{cases} -\dfrac{9{,}8}{2V_0^2}\times(1+\tan^2(\phi)) = -\dfrac{1}{4} \\ \tan(\phi) = 2 \\ h_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9{,}8}{2V_0^2}\times(1+2^2) = \dfrac{1}{4} \\ \tan(\phi) = 2 \\ h_0 = 2 \end{cases}$

D'où $\frac{24{,}5}{V_0^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow V_0^2 = 98$, comme $V_0 > 0$ on en déduit $V_0 = \sqrt{98} \approx 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 35\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$

## Exercice 2 — Étude de fonction - optimisation *5 points*

### Partie A –

Soit $g$ la fonction définie sur $]0;6[$ par

$$g(x) = (6-x)\sqrt{x}$$

et $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. Montrer en détaillant les calculs que

$$g'(x) = \frac{6-3x}{2\sqrt{x}}$$

$g(x) = (6-x)\sqrt{x}$ est de la forme $u(x)\times v(x)$
avec $u(x) = 6-x$ donc $u'(x) = -1$
et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$g'(x)$ est donc de la forme $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$g'(x) = -1\times\sqrt{x}+(6-x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2\sqrt{x}\times\sqrt{x}+6-x}{2\sqrt{x}} = \frac{-3x+6}{2\sqrt{x}}$

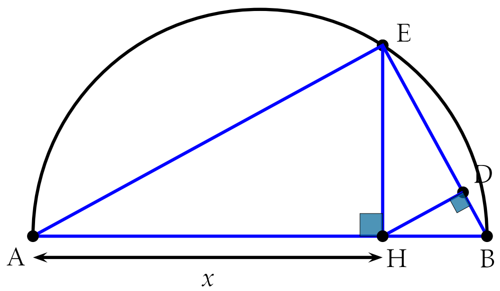
2. En déduire les variations de la fonction $g$ et son maximum sur $]0;6[$.

sur $]0;6[$, $\sqrt{x} > 0$ et $6 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

| x | $0 \qquad 2 \qquad 6$ |
| --- | --- |
| signe de $g'(x)$ | $+ \qquad 0 \qquad -$ |
| variations de $g$ | $\nearrow \quad 4\sqrt{2} \quad \searrow$ |

**Partie B – Application à un problème de géométrie**

On considère le demi-cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB] tel que AB = 6. H est un point du segment [AB] distinct des points A et B. On note $x$ la longueur AH. La perpendiculaire à (AB) en H coupe $\mathscr{C}$ en E. D est le pied de la hauteur issue de H dans le triangle EHB.




*L'objectif de cette partie est de déterminer la position du point* H *sur le segment* [AB] *telle que la distance* HD *soit maximale.*

On note HD = $h(x)$

1. Quelle est la nature du triangle AEB ?

Le triangle AEB est un inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB] : il est donc rectangle en E.

2. Prouver que $AE = \sqrt{6x}$ (vous pourrez exprimer $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right)$ dans deux triangles différents).

Dans le triangle ABE rectangle en E : $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{AE}{AB}$

Dans le triangle AHE rectangle en H : $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{AH}{AE}$

donc $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AH}{AE} \Leftrightarrow AE^2 = AB \times AH \Leftrightarrow AE^2 = 6x$

Or $AE > 0$, donc $AE = \sqrt{6x}$

3. Prouvez que $h(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{6}(6-x)\sqrt{x}$ (vous pourrez exprimer $\sin\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right)$ dans deux triangles différents).

Dans le triangle ABE rectangle en E : $\sin\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right) = \dfrac{AE}{AB}$

Dans le triangle BHD rectangle en D : $\sin\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right) = \dfrac{DH}{HB}$

donc $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{DH}{HB} \Leftrightarrow HD = \dfrac{AE \times HB}{AB} \Leftrightarrow HD = \dfrac{\sqrt{6x} \times (6-x)}{6} \Leftrightarrow HD = \dfrac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{x}(6-x)$ (car $x > 0$)

4. Répondre à la question initiale : « Pour quelle position du point H, la longueur HD est -elle maximale ? »

On remarque que $h(x) = \dfrac{\sqrt{6}}{6} f(x)$, donc son minimum est atteint pour $x = 2$ : le point H est alors au tiers du segment [AB] à partir de A.

## Exercice 3 — Trigonométrie

*3 points*

Soit $(u_n)$ une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et sa raison $r$ (avec $r > 1$).

$(v_n)$ est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \cos(u_n)$.

Trouver, en détaillant votre démarche, la plus petite valeur de $r$ telle que $v_3 = 0{,}5$.

Par définition de la suite $(u_n)$ : $u_0 = 0$ puis $u_1 = r$ ; $u_2 = 2r; \dots ; u_n = nr$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_n = \cos(nr)$.
On veut $v_3 = 0{,}5 \Leftrightarrow \cos(3r) = 0{,}5$.
On sait alors que pour $k$ et $k'$ entiers :

$$\left\{\begin{array}{l} 3r = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou } 3r = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} \times k \\ \text{ou } r = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} \times k' \end{array}\right.$$

les valeurs positives de $r$ sont donc : $\dfrac{\pi}{9} \approx 0{,}35$ ; $-\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{9} \approx 1{,}7$

Le plus petite valeur de $r$ telle que $v_3 = 0{,}5$ est donc $\dfrac{5\pi}{9}$.

## Exercice 4 — Suites

*7 points*

Une grande université, en pleine croissance d'effectifs, accueillait 27 500 étudiants en septembre 2016. Le président de l'université est inquiet car il sait que, malgré une gestion optimale des locaux, il ne pourra pas accueillir plus de 33 000 étudiants.

Une étude statistique lui permet d'élaborer un modèle de prévisions selon lequel chaque année :

- 150 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire (entre le 1er septembre et le 10 juin) ;
- les effectifs constatés à la rentrée de septembre connaissent une augmentation de 4% par rapport à ceux du mois de juin qui précède.

Pour tout entier naturel $n$, on note $u_n$ le nombre d'étudiants estimés selon ce modèle à la rentrée de septembre $2016 + n$, on a donc $u_0 = 27\,500$.

**1. a)** Estimer le nombre d'étudiants en juin 2017.

On sait que 150 étudiants vont démissionner en cours d'année, donc en juin 2017 il seront $27\,500 - 150 = 27\,350$

**b)** Vérifier que le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre 2017 est 28 444.

On sait que le nombre augmente de 4%, donc il y aura $27\,350 \times \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 28\,444$ étudiants.

**2.** Justifier que pour tout entier $n$, on a $u_{n+1} = 1{,}04u_n - 156$.

Soit $u_n$ le nombre d'étudiants à la rentrée de septembre, on sait que 150 démissionnent, il en reste $u_n - 150$ en juin ; ce nombre augmente de 4% en septembre de l'année suivante, il est donc multiplié par 1,04 d'où :
$u_{n+1} = (u_n - 150) \times 1{,}04 = 1{,}04u_n - 150 \times 1{,}04 = 1{,}04u_n - 156$

**3.** Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il donne l'année à partir de laquelle le nombre d'étudiants à accueillir dépassera la capacité maximale de l'établissement.

```
n prend la valeur 0
u prend la valeur 27 500
tant que u ⩽ 33 000 faire
    n prend la valeur n + 1
    u prend la valeur 1,04u − 156
fin
Afficher n
```

**4.** On fait fonctionner cet algorithme pas à pas. Compléter le tableau de variables donné en annexe en ajoutant des lignes si besoin.

Quelle valeur sera affichée à la sortie.

| valeur de $n$ | valeur de $u$ |
|---|---|
| 0 | 27 500 |
| 1 | 28 444 |
| 2 | 29 426 |
| 3 | 30 447 |
| 4 | 31 509 |
| 5 | 32 613 |
| 6 | 33 762 |

À la fin l'algorithme affiche $n = 6$.

**5.** On cherche à calculer explicitement le terme général de $u_n$ en fonction de $n$.
Pour cela, pour tout entier $n$, on définit la suite $(v_n)$ par $v_n = u_n - 3\,900$

**a)** Calculer $v_0$ et $v_1$.

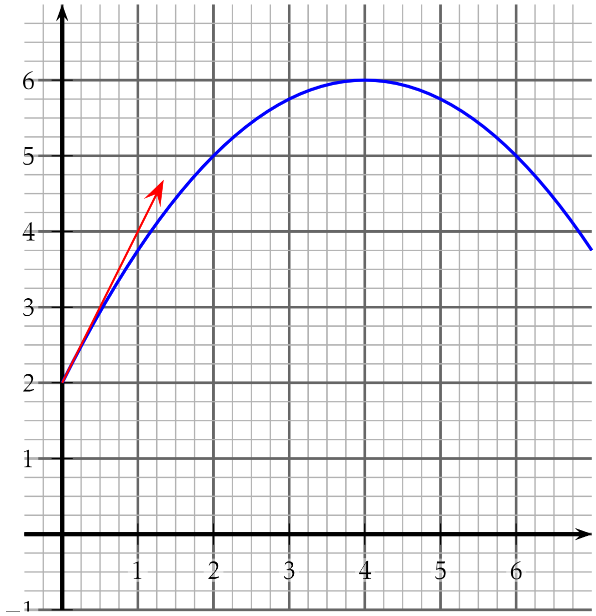
$v_0 = u_0 - 3\,900 = 27\,500 - 3\,900 = 23\,600$
$v_1 = u_1 - 3\,900 = 28\,444 - 3\,900 = 24\,544$

**b)** Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $u_n$, puis en fonction de $v_n$ ; en déduire que $(v_n)$ est une suite géométrique dont vous préciserez la raison et le premier terme.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3\,900 = 1{,}04u_n - 156 - 3\,900 = 1{,}04u_n - 4\,056 = 1{,}04(u_n - 3\,900) = 1{,}04v_n$
donc $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $v_0 = 23\,600$.

**c)** En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$.

$v_n = 1{,}04^n \times 23\,600$ et $v_n = u_n - 3\,900$
donc $u_n = 23\,600 \times 1{,}04^n + 3\,900$




Exercice 1 : trajectoire de la « femme canon »

**$n$ prend la valeur** $0$
**$u$ prend la valeur** $27\,500$
**tant que** $u \leqslant$ .................. **faire**
    **$n$ prend la valeur** ..................
    **$u$ prend la valeur** ..................
**fin**
**Afficher** ..................

| valeur de $n$ | valeur de $u$ |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

Exercice 4 : algorithme