	Compétences	
CAL	Calculer : Effectuer un calcul...	7
CHR	Chercher : Analyser un problèm...	1,5
RAI	Raisonner : Utiliser les notio...	1
REP	Représenter : Choisir un cadre...	3,5

	Connaissances	
SUI02	Reconnaître une suite arithmét...	7

	correction		
SUI02	1.1.a reconnaître suite arithmétique		0,5
SUI02	1.1.b suite A : rec => fonctionnelle		1
CAL	calcul de u_{2018}		0,5
SUI02	Somme : formule des n premiers termes		1
CAL	Somme : calcul		0,5
SUI02	1.2 reconnaître suite géométrique		1
CHR	Reconnaître 1024=2^{10}		1
SUI02	somme : formule des n premiers termes		1
CAL	somme calcul		0,5
	total	7	
CAL	2.1 calcul des premiers termes		1
REP	2.2 représentation : droite y=x		0,5
REP	représentation : « escalier »		1
REP	conjecture : variations et limites		1
CAL	2.3.a calcul des premiers termes		1
SUI02	2.3.b reconnaître suite géom		1
SUI02	démontrer suite géom : méthode		1
CAL	démontrer suite géom : exactitude des calculs		1
SUI02	2.3.c expression fonctionnelle		0,5
	total	8	
CAL	3.1 calcul des premiers termes		1
REP	3.2 placer points dans repère		0,5
CHR	3.3 identifier parabole + expression		0,5
RAI	identifier coeffs : méthode		1
CAL	identifier coeffs : calculs		1,5
REP	conclusion		0,5
	total	5	

C07

NOM ....- jour et mois de naissance ....

Dans ce sujet les lettres j et m représentent respectivement votre jour et votre mois de naissance.

Exercice 1 — Questions de cours *7 points*

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = m$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$.

a) Donner la nature de la suite (u_n).

Par définition (u_n) est une suite arithmétique (de raison 3).

b) Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{2018}$

On calcule u_{2018} : la suite étant arithmétique, on sait que $u_n = u_0 + n \times r$, ici $u_0 = m$ et $r = 3$, donc $u_{2018} = m + 3 \times 2\,018 = m + 6\,054$

D'après le cours :

$S = (2\,018+1)\dfrac{u_0 + u_{2018}}{2} = 2\,019 \times \dfrac{m + m + 6\,054}{2} = 2\,019(m + 3\,027)$

2. Donner, en détaillant, la valeur exacte de : $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{1\,024}$

on peut écrire : $S = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

C'est donc la somme des 11 premières puissances de $\frac{1}{2}$,

$S = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \dfrac{1}{2^{11}}\right) = 2\left(1 - \dfrac{1}{2\,048}\right) = \dfrac{2\,047}{1\,024}$

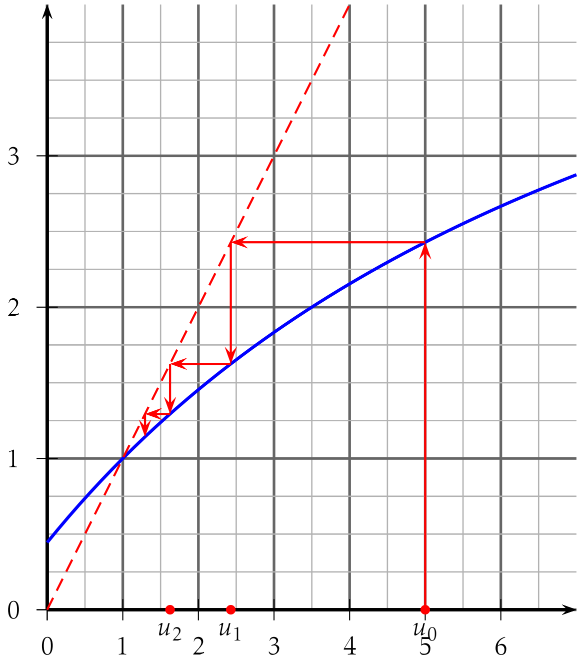
Exercice 2 — Suite et lectures graphiques *8 points*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 4}{u_n + 9}$$

Le graphique donne la représentation de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{6x + 4}{x + 9}$$



1. Donner les valeurs exactes de u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{6u_0+4}{u_0+9} = \frac{6\times 5+4}{5+9} = \frac{34}{14} = \frac{17}{7}$$

$$u_2 = \frac{6u_1+4}{u_1+9} = \frac{6\times\dfrac{17}{7}+4}{\dfrac{17}{7}+9} = \frac{13}{8}$$

2. À l'aide du graphique, représenter les premiers termes de la suite (u_n).
En déduire les variations de la suite et son comportement en $+\infty$.

par lecture graphique : la suite semble décroissante et elle semble converger vers 1

3. On définit sur $\mathbb{N}$ la suite (v_n) : $v_n = \dfrac{u_n+4}{u_n-1}$.

a) Calculer les valeurs exactes de v_0, v_1 et v_2.

$v_0 = \dfrac{u_0+4}{u_0-1} = \dfrac{9}{4}$ $\qquad v_1 = \dfrac{u_1+4}{u_1-1} = \dfrac{9}{2}$ $\qquad v_2 = \dfrac{u_2+4}{u_2-1} = 9$

b) Quelle semble être la nature de (v_n) ? Démontrer-le.

on remarque que $v_1 = 2 \times v_0$; $v_2 = 2 \times v_1$. La suite (v_n) semble être géométrique de raison 2.

Démontrons que (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}+4}{u_{n+1}-1} = \frac{\dfrac{6u_n+4}{u_n+9}+4}{\dfrac{6u_n+4}{u_n+9}-1} = \frac{10u_n+40}{u_n+9} \times \frac{u_n+9}{5u_n-5}$$

$$= \frac{10(u_n+4)}{5(u_n-1)} = \frac{10}{5}v_n = 2v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 2.

c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

À faire pour vendredi : trouver l'expression de u_n en fonction de n.

par définition $v_n = 2^n v_0 = \dfrac{9}{4} \times 2^n$

Exercice 3 — Suite et recherche

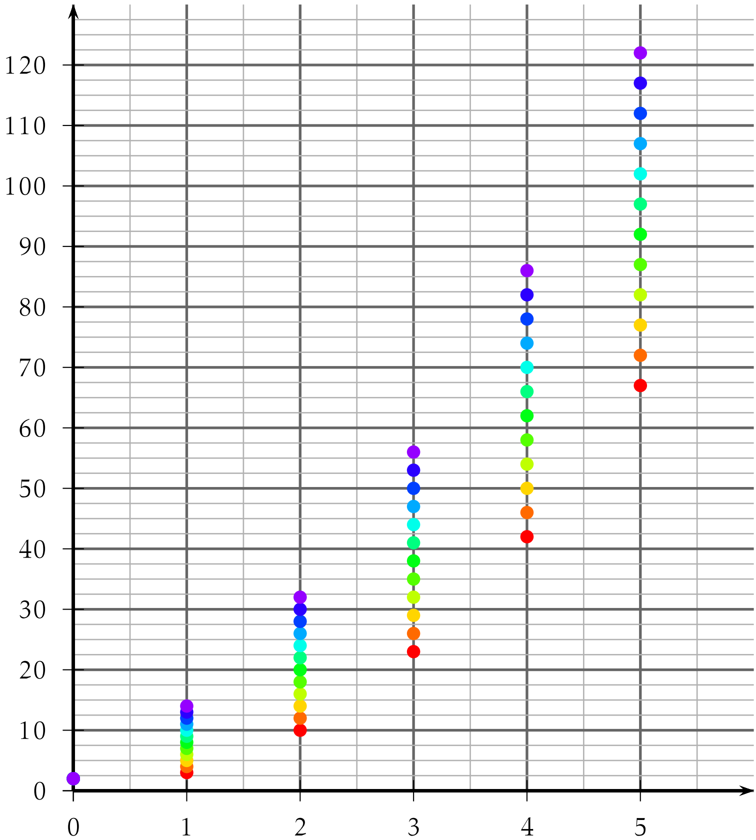
5 points

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 6n + m$ (m est votre mois de naissance)

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
u_1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
u_2	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
u_3	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53	56
u_4	42	46	50	54	58	62	66	70	74	78	82	86
u_5	67	72	77	82	87	92	97	102	107	112	117	122

2. Placer les points représentant cette suite dans le repère.



3. La forme du nuage de points doit vous faire pensez à l'expression d'une fonction connue (fonction affine, polynôme de degré 2 ou 3, fonction homographique, fonction racine carrée, fonction valeur absolue...)
Trouver l'expression de la fonction qui passe par tous les points associés à cette suite.

En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Les points semblent décrire une parabole, l'expression de la fonction serait $f(n) = an^2 + bn + c$.
or $f(0) = 2$, donc $c = 2$.
avec $n = 1$ et $n = 2$, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b + 2 = m + 2 \\ 4a + 2b + 2 = 2m + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = m \\ 2a + b = m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = m - 3 \end{cases}$$

On en déduit : $u_n = f(n) = 3n^2 + (m-3)n + 2$