		bilan des compétences	12,5
CAL	6	Calculer : Effectuer un calcul...	5,5
CHR	1	Chercher : Analyser un problèm...	0
RAI	2	Raisonner : Utiliser les notio...	2,5
REP	5	Représenter : Choisir un cadre...	4,5
		bilan des connaissances	12,5
GEO01	1	Droites : déterminer une équat...	1,5
GEO02	3	Calcul vectoriel : décompositi...	2,5
STA01	3	Calculer - interpréter les cou...	3,5

	correction	20
REP	1.1 Construire figure (points définis par rel. Vectorielle)	1
RAI	1.2 raisonnement cohérent et facile à suivre + conclusion	1,5
GEO02	coordonnées de vecteurs : formules	1
CAL	coordonnées de vecteurs : exactitude des calculs	1
GEO02	vérifier colinéarité	1
	total	5,5
REP	2. construire figue	1
RAI	raisonnement cohérent et facile à suivre + conclusion	1
GEO02	déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, I	1
GEO01	équations de droites (AD) et (DI) : méthode	1
CAL	équations de droites (AD) et (DI) : expressions	1
REP	coordonnées du point E : système	0,5
CAL	coordonnées du point E : calcul	0,5
CAL	aire des triangles	1
CAL	rapport des aires	0,5
	total	7,5
STA01	3.1 déterminer les indicateurs à l'aide la calculatrice	1,5
REP	3.2 dessiner diagramme en boîte	1
CAL	3.3 standardiser les valeurs	1
STA01	3.4 déterminer les indicateurs à l'aide de la calculatrice	1
REP	dessiner le diagramme en boîte	1
STA01	3.5 interpréter intervalle interquartile 50 %	1
	total	6,5
CHR	4. début prometteur ;-)	0,5
	total	0,5

C08

NOM ....

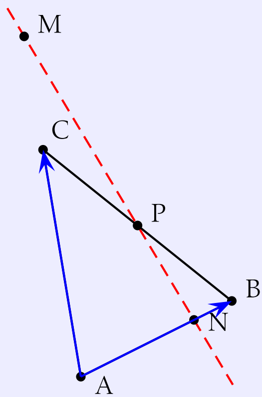
Exercice 1 — M, N, P

5,5 points

ABC est un triangle quelconque. Les points M, N et P sont définis par :

$\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

1. Construire une figure représentant cette situation.



2. Les points M, N et P semblent alignés : démontrez qu'ils le sont !

On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$:

Les coordonnées de M sont

$$\begin{cases} x_M = \frac{3}{2}(x_C - x_A) + x_A \\ y_M = \frac{3}{2}(y_C - y_A) + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{2}(0-0) + 0 \\ y_M = \frac{3}{2}(1-0) + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées de N sont

$$\begin{cases} x_N = \frac{3}{4}(x_B - x_A) + x_A \\ y_N = \frac{3}{4}(y_B - y_A) + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3}{4} \\ y_M = 0 \end{cases}$$

P est le milieu de [BC] donc ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

Puis celles du vecteur $\overrightarrow{NP}$

$\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} x_P - x_N \\ y_P - y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires :

$x_{\overrightarrow{MP}} \times y_{\overrightarrow{NP}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \qquad y_{\overrightarrow{MP}} \times y_{\overrightarrow{NP}} = -1 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$

les produits sont égaux, donc les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires : les points M, N et P sont alignés.

Exercice 2 — ABCD

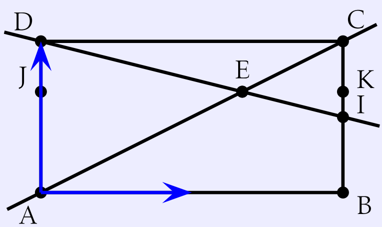
8 points

ABCD est un rectangle tel que AB = 2 et AD = 1. I est le milieu de [BC] et E est l'intersection des droites (AC) et (DI)

Calculer, en détaillant votre démarche, le rapport $\dfrac{\text{Aire de ADE + aire de CEI}}{\text{Aire de ABCD}}$

Aide : vous pourrez construire une figure et travailler dans le repère orthonormé $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que D ait pour coordonnées $(0;1)$ et B ait pour coordonnées $(2;0)$.

Rappel : Aire du triangle : $\dfrac{1}{2}\text{base} \times \text{hauteur}$



On se place dans le repère orthonormé $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que D ait pour coordonnées $(0;1)$ et B ait pour coordonnées $(2;0)$.

On a donc $I\left(2;\frac{1}{2}\right)$ et $C(2;1)$.

On en déduit que la droite (AC) a pour équation $y=\dfrac{1}{2}x$ et que la droite (DI) a pour équation $y=\dfrac{-\frac{1}{2}}{2}(x-0)+1$ (en effectuant les calculs à partir du point D et en utilisant la formule : $y=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x-x_0)+y_0$)

donc (DI) : $y=-\dfrac{1}{4}x+1$

Les coordonnées du point E vérifient donc :

$$\begin{cases} y_E=\dfrac{1}{2}x_E \\ y_E=-\dfrac{1}{4}x_E+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_E=\dfrac{1}{2}x_E \\ \dfrac{1}{2}x_E=-\dfrac{1}{4}x_E+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E=\dfrac{4}{3} \\ y_E=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

L'aire du triangle ADE : $\mathscr{A}_{AED}=\dfrac{1}{2}AD\times EJ=\dfrac{1}{2}\times 1\times x_E=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{2}{3}$

L'aire du triangle CEI : $\mathscr{A}_{CEI}=\dfrac{1}{2}IC\times EK=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(x_D-x_E)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}$

donc $\dfrac{\mathscr{A}_{ADE}+\mathscr{A}_{CEI}}{\mathscr{A}_{ABCD}}=\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}{1\times 2}=\dfrac{5}{12}$

Exercice 3 — Statistiques *6,5 points*

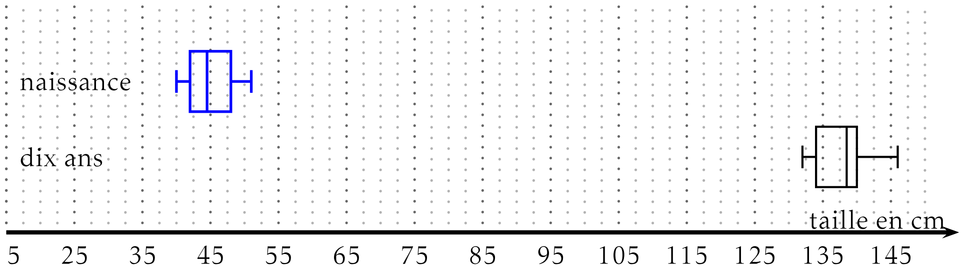
Une étude permet d'obtenir les tailles en centimètres de 10 enfants à la naissance : 40 ; 41 ; 42 ; 43 ; 44 ; 45 ; 46 ; 48 ; 50 ; 51

et de 10 enfants de dix ans : 132 ; 132 ; 134 ; 136 ; 138 ; 139 ; 139 ; 140 ; 144 ; 146

1. À l'aide de la calculatrice, donner la médiane, la moyenne ($\bar{x}$), l'écart-type (σ), et l'intervalle interquartile de la série « naissance » (arrondir les résultats au dixième).

On trouve : $\bar{x}=45$; $\sigma=3{,}5$ min $=40$; $Q_1=42$; Med $=44{,}5$; $Q_3=48$ et Max $=51$
L'intervalle interquartile est donc $[42;48]$.

2. Construire le diagramme en boîte associé à cette série sur le graphique suivant (le diagramme correspondant à la série « dix ans » est donné.



Les données étant assez différentes (un écart de 10 cm à la naissance n'est pas comparable à un écart de 10 cm à l'âge de dix ans !) on décide de les *standardiser* : c'est à dire, pour chacune des série, on associe à chaque valeur x_i la valeur $\dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$.

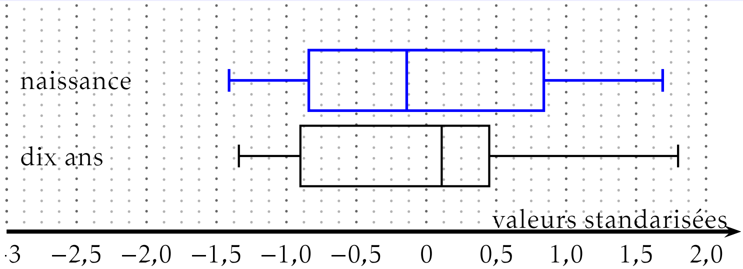
3. Compléter le tableau pour la série « naissance », les nouvelles valeurs de la série « dix ans » sont déjà calculées (arrondir au dixième).

série « naissance »		série « dix ans »
taille en cm	valeur standarisée	valeur standarisée
40	−1,4	−1,3
41	−1,1	−1,3
42	−0,8	−0,9
43	−0,5	−0,5
44	−0,3	0
45	0	0,2
46	0,3	0,2
48	0,8	0,4
50	1,4	1,3
51	1,7	1,8

4. Compléter le graphique suivant en construisant la diagramme en boîte correspondant aux données standardisées de la série « naissance », le diagramme

correspondant à la série « dix ans » est déjà donné (arrondir les valeurs au dixième).

On trouve : $\bar{x} = 0$; $\sigma = 1$ min $= -1{,}4$; $Q_1 = -0{,}8$; Med $= -0{,}1$; $Q_3 = 0{,}8$ et Max $= 1{,}7$



5. On considère que les données suivent une « distribution normale » si plus de 50 % des valeurs standarisées sont dans l'intervalle $[-1\,;1]$.
   Ces données suivent-elles « une distribution normale » ?
   On sait que l'intervalle interquartile, représenté par le rectangle, contient 50 % des valeurs de la série : une simple lecture graphique permet d'affirmer que les données suivent une distribution « normale »

Exercice 4 — Généralisations *0 points*

J'ai un doute sur votre rapidité... Les points obtenus seront ou en bonus ou cette partie se transformera en devoir maison ;-)

Partie A – M, N, P

On reprend l'exercice 1. : soit m un entier différent de 1. On définit alors les points M, N et P de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m-1}\overrightarrow{AC}\,; \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{m}{m+1}\overrightarrow{AB} \text{ et } \qquad \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m, les points M, N et P sont-ils alignés ?

On reprend la même démarche :

On se place dans le repère $\left(A\,; \overrightarrow{AB}\,; \overrightarrow{AC}\right)$:

Les coordonnées de M sont

$$\begin{cases} x_M = \frac{m}{m-1}(x_C - x_A) + x_A \\ y_M = \frac{m}{m-1}(y_C - y_A) + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \ 0 \\ y_M = \frac{m}{m-1} \end{cases}$$ ($m \neq 1$, donc y_M est défini)

Les coordonnées de N sont

$$\begin{cases} x_N = \frac{m}{m+1}(x_B - x_A) + x_A \\ y_N = \frac{m}{m+1}(y_B - y_A) + y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{m}{m+1} \\ y_N = \ 0 \end{cases}$$ ($m \in \mathbb{N}$, donc $m+1 \neq 0$ donc x_M est défini)

P est le milieu de [BC] donc ses coordonnées sont $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MP}$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{m}{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-(m+1)}{2(m-1)} \end{pmatrix}$$

Puis celles du vecteur $\overrightarrow{NP}$

$$\overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} x_P - x_N \\ y_P - y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{m}{m+1} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-m+1}{2(m+1)} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires :

$$x_{\overrightarrow{MP}} \times y_{\overrightarrow{NP}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$y_{\overrightarrow{MP}} \times y_{\overrightarrow{NP}} = \frac{-(m+1)}{2(m-1)} \times \frac{-m+1}{2(m+1)} = \frac{-(-m+1)}{4(m-1)} = \frac{1}{4}$$

les produits sont donc toujours égaux ! les points M, N et P sont toujours alignés !

Partie B – ABCD

On reprend l'exercice 2. : ABCD est un rectangle tel que $AB = b$ ($b > 0$) et $AD = 1$. I est le milieu de [BC] et E est l'intersection des droites (AC) et (DI)

Pour quelle(s) valeur(s) de b le rapport $\dfrac{\text{Aire de ADE + aire de CEI}}{\text{Aire de ABCD}}$ est-il minimal ?

On reprend le même raisonnement...

On se place dans le repère orthonormé $(A;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ tel que D ait pour coordonnées $(0;1)$ et B ait pour coordonnées $(b;0)$.

On a donc $I\left(b;\frac{1}{2}\right)$ et $C(b;1)$.

On en déduit que la droite (AC) a pour équation $y = \frac{1}{b}x$ et que la droite (DI) a pour équation $y = \dfrac{-\frac{1}{2}}{b}(x-0)+1$ (en effectuant les calculs à partir du point D)

donc (DI) : $y = -\dfrac{1}{2b}x + 1$

Les coordonnées du point E vérifient donc :

$$\begin{cases} y_E = \dfrac{1}{b}x_E \\ y_E = -\dfrac{1}{2b}x_E + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_E = \dfrac{1}{b}x_E \\ \dfrac{1}{b}x_E = -\dfrac{1}{2b}x_E + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{2b}{3} \\ y_E = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

L'aire du triangle ADE : $\mathscr{A}_{AED} = \dfrac{1}{2}AD \times EJ = \dfrac{1}{2} \times 1 \times x_E = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \dfrac{2b}{3} = \dfrac{b}{3}$

L'aire du triangle CEI : $\mathscr{A}_{CEI} = \dfrac{1}{2}IC \times EK = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \times (x_D - x_E) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{b}{3} = \dfrac{b}{12}$

donc $\dfrac{\mathscr{A}_{ADE} + \mathscr{A}_{CEI}}{\mathscr{A}_{ABCD}} = \dfrac{\frac{b}{3} + \frac{b}{12}}{1 \times b} = \dfrac{5}{12}$

Donc quelque soit $b > 0$, le rapport des aires est constant !