	bilan des compétences
CAL	Calculer : Effectuer un calcu
COM	Communiquer : Opérer la c
REP	Représenter : Choisir un cad
bilan des connaissances	
ANT	Connaissances des années a
FCT01	Limite : à déterminer pour u
FCT02	Limite : interprétation grap
FCT03	Dérivées : u^n ; ln(u) ; exp(u..
FCT08	Exponentielle : connaître la
correction	
CAL	1.1 Compléter tableau valeu culs expo
FCT02	1.2 interpréter limite en +in
FCT03	1.3 dérivée de e^u (formule vée)
ANT	dérivée poly degré 2
ANT	formule dérivée produit
CAL	calcul détaillé vérifiant exp de f '(x)
ANT	1.4.a résoudre équation de coeff

C02

NOM ....

Exercice 1 — *12 points*

d'après Antilles-Guyanne, juin 2015, exercice 3

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 1{,}5x)\mathrm{e}^x + 3$

1. Compléter le tableau de valeurs, arrondir les résultats à 10^{-1} près.

x	-5	-3	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	2
$f(x)$	$3,2$	$3,7$	4	$3,9$	$3,6$	3	$2,2$	$1,6$	$10,4$

2. Sachant que la limite de la fonction f en $-\infty$ est 3, qu'en déduit-on pour la courbe représentative de f ?

   Cela signifie que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

3. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x par :
   $f'(x) = \left(x^2 + 0{,}5x - 1{,}5\right)\mathrm{e}^x$

   f est la forme $u \times v + 3$ avec
   $u(x) = x^2 - 1{,}5x \qquad u'(x) = 2x - 1{,}5$
   et $v(x) = \mathrm{e}^x \qquad v'(x) = \mathrm{e}^x$
   donc $f'(x) = (2x - 1{,}5)\mathrm{e}^x + (x^2 - 1{,}5x)\mathrm{e}^x$
   $= (2x - 1{,}5 + x^2 - 1{,}5x)\mathrm{e}^x$
   $= \left(x^2 + 0{,}5x - 1{,}5\right)\mathrm{e}^x$

4. a) Résoudre l'équation $x^2 + 0,5x - 1,5 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

On reconnaît une équation du second degré de la forme $ax^2 + bxc = 0$; avec $a = 1$, $b = 0{,}5$ et $c = -1{,}5$.
$\Delta = 0{,}5^2 - 4 \times 1 \times -1{,}5 = 6{,}25$
L'équation admet donc deux solutions : $\alpha = \dfrac{-(0{,}5) - \sqrt{6{,}25}}{2 \times 1} = \dfrac{-3}{2} = -1{,}5$
et $\beta = \dfrac{-(0{,}5) + \sqrt{6{,}25}}{2 \times 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

b) En déduire le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc f' est du signe de $(x^2 + 0,5x - 1,5)$.
C'est un polynôme du second degré, sa représentation graphique est une parabole « orientée vers le haut » car le coefficient de x^2 est positif ; on en déduit que $f'(x)$ est positive sur $]-\infty ; -1{,}5] \cup [1 ; +\infty[$ et négative sinon.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

J'ai tracé la courbe de la fonction f à l'aide ma calculatrice ☐ oui ☐ non

Les variations de la courbe de la calculatrice correspondent au tableau de variations ☐ oui ☐ non

Exercice 2 —

8 points

D'après Polynésie, juin 2017, exercice 3

On étudie le comportement d'organismes vivants placés dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence.

On modélise cette situation par une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ qui à chaque instant t (exprimé en heures) associe le nombre d'individus, en milliers, présents dans l'enceinte à cet instant.

On admet que pour tout réel t de $[0 ; +\infty[$, $f(t) = 1\,200 - 1\,000\,e^{-0{,}04t}$

Dans le repère orthogonal donné, on a tracé la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction f.

1. La courbe $(\mathcal{C})$ suggère l'existence d'une asymptote horizontale.
   Donner une équation de cette asymptote et justifier ce résultat par un calcul de limite.
   On pourra utiliser le résultat suivant : $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,04t} = 0$.

   On lit une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1\,200$.
   par le calcul : on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,04t} = 0$
   donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 1\,000\,\mathrm{e}^{-0,04t} = 0$
   d'où $\lim\limits_{t\to+\infty} 1\,200 - 1\,000\,\mathrm{e}^{-0,04t} = 1\,200$

2. a) En utilisant le graphique, déterminer le nombre d'individus, en milliers, présents dans l'enceinte au bout de 40 heures. On fera apparaître les traits de construction utiles.
   On lit 1 000 individus.

   b) Déterminer, par une lecture graphique, au bout de combien d'heures le nombre d'individus, en milliers, initialement présents dans l'enceinte aura été multiplié par 4.

   Initialement il y avait 200 individus; donc en multipliant par 4, on cherche le temps qu'il a fallut pour avoir 800 individus : on lit 20,25 soient 20 heures et un quart d'heure.

3. On appelle vitesse d'évolution du nombre d'individus à l'instant t, exprimée en nombre d'individus en milliers par heure, le nombre $f'(t)$.

   a) Pour tout réel t positif ou nul, calculer $f'(t)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

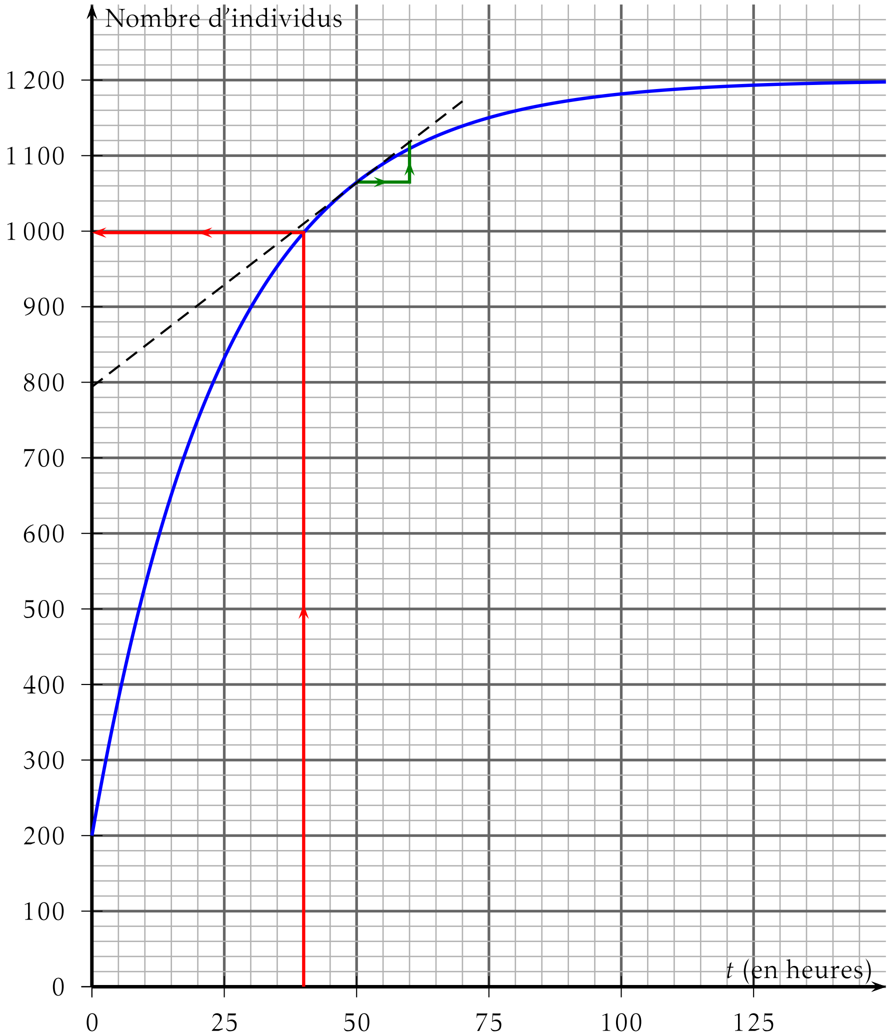
   $f(t) = 1\,200 - 1\,000\,\mathrm{e}^{-0,04t}$
   donc f est de la forme $1\,200 - \lambda\mathrm{e}^{u(t)}$ avec $\lambda = 1\,000$ et $u(x) = -0,04t$
   la dérivée de e^u est $u'\,\mathrm{e}^u$, donc
   $f'(x) = -1\,000 \times (-0,04)\,\mathrm{e}^{-0,04t} = 40\,\mathrm{e}^{-0,04t}$

J'ai vérifié que le signe de la dérivé que j'ai obtenue est ☐ oui
cohérent avec les variations de la fonction ☐ non

b) On appelle (T) la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 50. Tracer cette tangente sur le graphique en expliquant votre démarche.

méthode 1 : l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est donnée par : $y = f'(x)(x-a) + f(a)$;
ici $y = f'(50)(x-50) + f(50)$
$y = 40\,\mathrm{e}^{-2}(x-50) + 1\,200 - 1\,000\,\mathrm{e}^{-2}$
$y = 40\,\mathrm{e}^{-2}\,x - 3\,000\,\mathrm{e}^{-2} + 1\,200$
$y \approx 5{,}4x + 794$
méthode 2 : on calcule $f'(50) = 40\,\mathrm{e}^{-2} \approx 5{,}4$; à partir du point de la courbe d'abscisse 50, on se déplace de 10 unités en abscisses, puis de $10 \times 5{,}4 = 54$ unités en ordonnées (car le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé).

c) La vitesse d'évolution du nombre d'individus, en milliers par heure, diminue au cours du temps.
Comment cela se traduit-il sur le graphique ?
Les pentes des tangentes (nombres dérivés) se rapprochent de 0 ; les tangentes deviennent presque parallèles à l'axe des abscisses.


Nombre d'individus
1 200
1 100
1 000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
25
50
75
100
125
t (en heures)