		bilan des compétences	14
CAL	9	Calculer : Effectuer un calcul...	6
CHR	1	Chercher : Analyser un problèm...	1
COM	1	Communiquer : Opérer la conver...	2
MOD	3	Modéliser : Traduire en langag...	2
REP	5	Représenter : Choisir un cadre...	3

		bilan des connaissances	10
ANT	2	Connaissances des années antér...	1,75
FCT02	1	Limite : interprétation graphi...	0,5
FCT03	1	Dérivées : un̂ ; ln(u) ; exp(u...	1
FCT06	2	Logarithme / exponentielle : u...	1,75
FCT08	2	Exponentielle : connaître la f...	1,5
STA01	1	Représenter une série statisti...	1,25
SUI01	2	Reconnaître / modéliser une su...	1,5
SUI03	1	Connaître la limite d'une suit...	0,75

correction		
CAL	1.A.1 calcul f(0)	0,5
FCT08	1.A.2.a justifier lim en +inf	1
FCT02	1.A.2.b justifier asymptote	0,5
REP	tracer asymptote	0,5
MOD	1.A.2.c interpréter limite en +inf	0,5
FCT03	1.A.3 dérivée exp(u(x))	1
ANT	dérivée k/v	1
FCT08	1.A.4 signe exp	0,5
CAL	signe dérivée	0,75
ANT	1.A.5 variations de f	0,75
CAL	1.A.6 calcul images	1
REP	1.A.7 tracer courbe	1
	total 9	
MOD	1.B.1 modéliser inéquation	0,25
CAL	1.B.2 inéq : sens inégalités justifié	0,5
FCT06	utilisation de ln / exp	0,5
CAL	calcul	0,25
REP	1.B.3 retrouver résultat	0,5
	total 2	
MOD	2.A justifier choix de la fonction	1,25
REP	2.B.1.a lire valeurs	0,5
SUI01	2.B.1.b reconnaître suite géom	1
REP	2.B.2 baisse en % $\longrightarrow$ coeff multipl	0,5
SUI01	expression explicite suite géom	0,5
SUI03	2.B.3 justifier limite en +inf suite géom	0,75
CHR	2.B.4.a modélisation + recherche	1
CAL	Résultats + calculs	1
CAL	2.B.4.b calculs	0,5
	7	
CAL	3.1 calculs	1
STA01	3.2 équation droite régression	1,25
FCT06	3.3 ajustement exponentiel	1,25
CAL	3.4 calcul	0,5
	4	
COM	rédaction générale	2

C05

NOM ....- Mois de naissance ....

Durée 2 heures - note sur 24 points (dont 2 points de rédaction générale)

Exercice 1 —

11 points

d'après Antilles-Guyane, juin 2014, exercice 1

Des scientifiques étudient la croissance de plants de tomates après plantation. Ils ont établi que la hauteur des plants en centimètres peut être modélisée en fonction du temps et du mois de naissance du planteur par la fonction f définie sur $[0 \ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{120}{5\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 1 + 0,05m}$$

avec m le numéro de votre mois de naissance et t le temps en jours après le jour de plantation.

Partie A – Étude de la fonction

1. Calculer la hauteur des plants le jour où ils sont plantés, c'est-à-dire $f(0)$. Donner la valeur exacte, puis arrondi au dixième.

$$f(0) = \frac{120}{5\,\mathrm{e}^{-0,08\times 0} + 1 + 0,05m} = \frac{120}{5 + 1 + 0,05m} = \frac{120}{6 + 0,05m}$$

mois n°	1	2	3	4	5	6
$f(0)$	19,9	19,7	19,5	19,4	19,2	19,1

mois n°	7	8	9	10	11	12
$f(0)$	19,0	18,8	18,6	18,5	18,3	18,2

2. a) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ (on rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,08t} = 0$).
Arrondir le résultat à l'unité.

- $\lim\limits_{t\to+\infty} 5\,\mathrm{e}^{-0,08t} = 0$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} 5\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 1 + 0,05m = 1 + 0,05m$
- $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{120}{1 + 0,05m}$

mois n°	1	2	3	4	5	6
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	114	109	104	100	96	92

mois n°	7	8	9	10	11	12
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	89	86	83	80	77	75

b) En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe représentative de f.
Tracer cette asymptote sur le graphique.
Quand t tend vers $+\infty$, la fonction tend vers une limite finie ℓ ; donc la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe en $+\infty$.

c) Comment cela se traduit-il pour la croissance d'un plant ?
La croissance du plan est limité dans le temps.

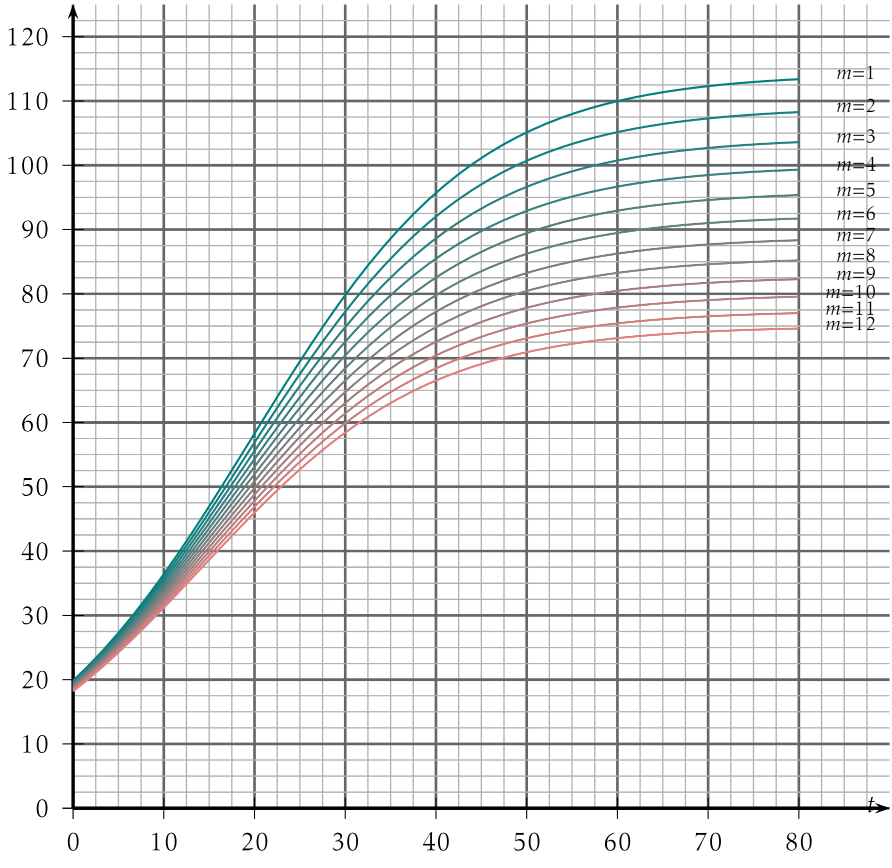
3. Calculer la dérivée de f et montrer que
$$f'(t) = \frac{48\,\mathrm{e}^{-0,08t}}{(5\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 1 + 0,05m)^2}$$
où m est le numéro de votre mois de naissance.

f de la forme $k \times \dfrac{1}{v}$, donc sa dérivée est de la forme $k \times \dfrac{-v'}{v^2}$,
avec $k = 120$; $v(x) = 5\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 1 + 0,05m$.
donc $v'(x) = 5 \times (-0,08)\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 0 = -0,4\,\mathrm{e}^{-0,08t}$
d'où l'expression donnée.

4. Étudier le signe de f' sur $[0\,;\,+\infty[$.

quelque soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que $\mathrm{e}^x > 0$, donc $48\,\mathrm{e}^{-0,08t} > 0$.
le numérateur est un carré, donc positif,
donc quelque soit $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) > 0$

5. En déduire les variations de f sur $[0\ \ +\infty[$.
on a vu que la dérivée est toujours strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.



graphique de l'exercice n° 1.

6. Compléter le tableau de valeurs de la fonction f (arrondir à 10^{-1} près).

t	0	10	20	30	40	50	60
$f(t)$							

7. Tracer la courbe représentative de f dans le repère.

Partie B – Exploitation

1. Donner une inéquation permettant de déterminer au bout de combien de jours le plant mesurera plus de 40 cm de haut.

on cherche t tel que $f(t) \geqslant 40$

2. Résoudre cette inéquation (on donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à l'unité du résultat).

$f(t) \geqslant 40 \Leftrightarrow \dfrac{120}{5\,\mathrm{e}^{-0,08t}+1+0,05m} \geqslant 40 \Leftrightarrow \dfrac{120}{40} \geqslant 5\,\mathrm{e}^{-0,08t}+1+0,05m$

remarque : l'ordre ne change pas $5\,\mathrm{e}^{-0,08t}+1+0,05m > 0$

$\Leftrightarrow 30-1-0,05m \geqslant 5\,\mathrm{e}^{-0,08t} \Leftrightarrow \dfrac{29-0,05m}{5} \geqslant \mathrm{e}^{-0,08t}$

$\Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{29-0,05m}{5}\right) \geqslant -0,08t \Leftrightarrow \dfrac{\ln\left(\dfrac{29-0,05m}{5}\right)}{-0,08} \leqslant t$

mois n°	1	2	3	4	5	6
t	11,8	12,1	12,4	12,8	13,1	13,5
mois n°	7	8	9	11	12	
t	13,8	14,2	14,6	15,0	15,5	15,9

3. Retrouver ce résultat en utilisant la courbe représentative de f ou la calculatrice. (Dans les deux cas, on explicitera la démarche suivie).

Exercice 2 —

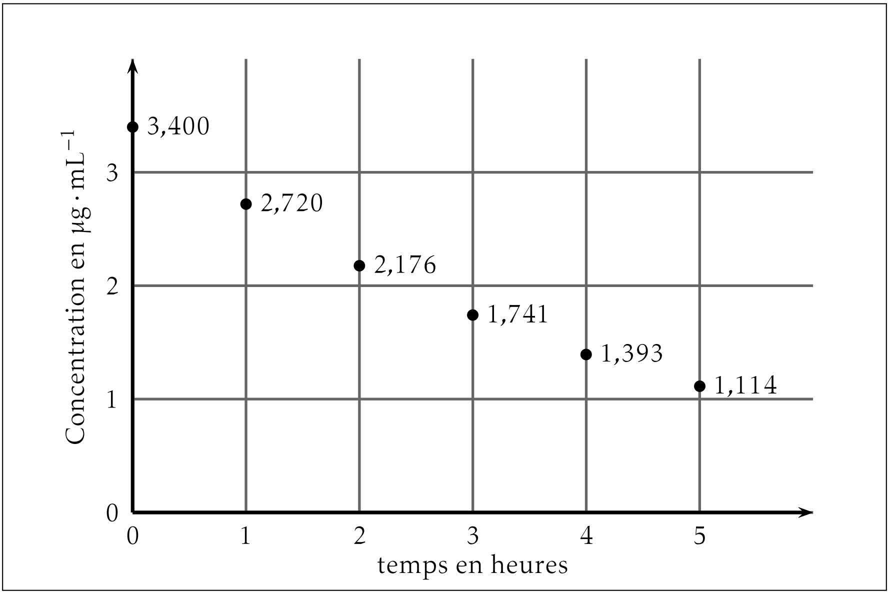
7 points

D'après Métropole, juin 2017, exercice 2

On s'intéresse à une modélisation de la concentration d'un médicament, injecté dans le sang d'un patient, en fonction du temps.

À 7 heures du matin, on injecte le médicament au patient. Toutes les heures, on relève la concentration de médicament dans le sang, exprimée en μg·mL^{-1}. À l'injection, cette concentration est égale à 3,4 $\mu\mathrm{g}\cdot\mathrm{mL}^{-1}$.

Le nuage de points donne la concentration de ce médicament dans le sang en fonction du temps écoulé depuis l'injection.



nuage de points de l'exercice n° 2.

Partie A –

Dans cette partie, on modélise la concentration de ce médicament par une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

Parmi les trois modélisations proposées, une seule est correcte. Laquelle ? Justifier.

a) $f : x \mapsto 0{,}6x + 3{,}4$

b) $g : x \mapsto 3{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}223x}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{9}{3+x}$

f est une fonction affine croissante car le coefficient directeur vaut 0,6 ; donc elle ne convient pas.

on a $h(0) = \dfrac{9}{3+0} = 3$ et $g(0) = 3{,}4\,\mathrm{e}^{-0{,}223\times 0} = 3{,}4$

les fonctions h et g étant toutes deux décroissantes et ayant la même limite en $+\infty$ (zéro), on préfère la fonction g.

Partie B –

Dans cette partie, on choisit de modéliser la concentration du médicament par une suite, en prenant, pour valeurs des trois premiers termes de la suite, les valeurs données par le graphique.

1. Pour tout entier naturel n, on note C_n la concentration, exprimée en $\mu g \cdot mL^{-1}$, au bout de n heures, de ce médicament dans le sang. Une partie de ce médicament est éliminée toutes les heures.

a) Par lecture du graphique, donner les valeurs de C_0, C_1 et C_2.

On lit $C_0 = 3{,}400$, $C_1 = 2{,}720$ et $C_3 = 2{,}176$

b) Que peut-on alors conjecturer sur la nature de la suite (C_n) ? Pourquoi ?

On remarque que $\dfrac{C_1}{C_0} = 0{,}8$ et que $\dfrac{C_2}{C_1} = 0{,}8$

on peut conjecturer que la suite (C_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $C_0 = 3{,}400$

On admet qu'à chaque heure, la concentration du médicament restante baisse de 20 %.

2. Pour tout entier naturel n, exprimer C_n en fonction de n.

Une baisse de 20 % correspond à une multiplication par $\left(1 - \dfrac{20}{100}\right) = 0{,}8$

donc par définition $C_n = 0{,}8^n \times C_0 = 0{,}8^n \times 3{,}4$

3. Déterminer alors la limite de la suite (C_n) lorsque n tend vers l'infini. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

(C_n) est une suite géométrique de raison $0{,}8 < 1$ et de premier terme positif, donc sa limite en $+\infty$ est 0.

4. Pour des raisons d'efficacité, le patient reçoit immédiatement une nouvelle injection de médicament dès que, lors d'un relevé à une heure donnée, la concentration $\mathbf{c}$ du médicament dans le sang est inférieure ou égale à $1\,\mu g \cdot mL^{-1}$. À la nouvelle injection, la concentration du médicament dans le sang est alors égale à $\mathbf{c} + 3{,}4\,\mu g \cdot mL^{-1}$.

a) À quelle heure le patient devra-t-il recevoir une deuxième injection ?

On cherche la première fois où le patient a reçu une nouvelle injection, c'est à dire on cherche n tel que $0{,}8^n \times 3{,}4 \leqslant 1$

$\Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant \dfrac{1}{3{,}4} \Leftrightarrow 0{,}8^n \leqslant 0{,}29$

$\Leftrightarrow \ln\left(0{,}8^n\right) \leqslant \ln(0{,}29) \Leftrightarrow n\ln(0{,}8) \leqslant -1{,}24$

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{-1{,}24}{\ln(0{,}8)} \Leftrightarrow n \geqslant 5{,}5$

donc la première injection a lieu au bout de 6 heures. (On pouvait retrouver ce résultat en expérimentant à l'aide de la calculatrice).

Mais le plus simple est peut-être de calculer ce qui se passe heure par heure...

n	C_n		
0	3,4		
1	2,72		
2	2,18		
3	1,74		
4	1,40		
5	1,11		
6	0,90	4,3	on ajoute 3,4
7		3,43	on reprend des baisses de 20 %
8		2,75	
9		2,20	
10		1,76	
11		1,41	
12		1,12	
13		0,90	

La deuxième injection aura lieu à la 13$^{\text{eme}}$ heure.

b) Quelle est la concentration du médicament à cette deuxième injection ? On arrondira le résultat à $0{,}1\,\mu\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$.

D'après le tableau précédent, la concentration est de $0{,}9\,\mu\text{g}\cdot\text{mL}^{-1}$

Exercice 3 — *4 points*

D'après Antilles-Guyane, juin 2016, exercice 4A

Les immunoglobulines G, notées IgG, sont des anticorps qui interviennent dans l'élimination d'antigènes. On étudie la concentration d'IgG dans le sang d'un patient au fil des semaines lors du contact avec un antigène.

On a recueilli les informations consignées dans le tableau suivant, où t_i est le temps en semaines écoulées après ce contact et y_i le taux d'immunoglobulines G en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$:

Temps t_i en semaines	1	2	3	4	5	6
Taux y_i d'IgG en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$	15,4	16,7	15,9	14,8	13,7	12,5

On pose $z = \ln\left(\dfrac{y}{t}\right)$.

1. Compléter le tableau suivant, les résultats seront arrondis à 10^{-2} :

Temps t_i en semaines	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln\left(\dfrac{y_i}{t_i}\right)$	2,73	2,12	1,67	1,31	1,01	0,73

2. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression linéaire de z en t, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près.
À l'aide de la calculatrice, on trouve : $z = -0{,}39t + 2{,}97$

3. Déterminer un ajustement de y en fonction de t de la forme $y = at\,\mathrm{e}^{bt}$ où a et b sont des nombres réels. On arrondira les a et b au dixième.

On a $z = -0{,}39t + 2{,}97$ et on sait que $z = \ln\left(\dfrac{y}{t}\right)$, donc $\ln\left(\dfrac{y}{t}\right) = -0{,}39t + 2{,}97$

$\dfrac{y}{t} = \mathrm{e}^{-0{,}39t+2{,}97}$

$y = t \times \mathrm{e}^{-0{,}39t} \times \mathrm{e}^{2{,}97}$

$y = 19{,}5t\,\mathrm{e}^{-0{,}4t}$ (en arrondissant au dixième)

4. En déduire une estimation du taux d'IgG à la 8$^{\text{e}}$ semaine. Arrondir à 10^{-1}.
pour $t = 8$, on trouve $y = 19{,}5 \times 8\,\mathrm{e}^{-0{,}4\times 8} \approx 6{,}4$