Sujet à rendre avec la copie **Numéro d'anonymat : ....**

Les calculatrices scientifiques sont autorisées à condition d'être en **mode examen**.

Vous devez mettre votre calculatrice en mode examen devant le surveillant de salle, lorsqu'il vous le demande (généralement lors l'émargement de la feuille de présence).

pour les Casio	pour les Texas Instrument
calculatrice **éteinte**, appuyer simultanément sur les trois touches suivantes : $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{7}$, $\boxed{\text{AC}}$	calculatrice **éteinte**, appuyer simultanément sur les trois touches suivantes : $\boxed{\text{AC}}$, $\boxed{\text{enter}}$, $\boxed{\text{ON}}$

À la mise en place du mode examen, une diode clignote à l'avant de la machine et un symbole s'affiche en haut de l'écran.

Si votre machine est déjà en mode examen, vous devez quand même effectuer la mise en mode examen devant le surveillant de salle.

Exercice 1 —

7 points

D'après BAC STL, Polynésie, juin 2015, exercice 2

On injecte dans le sang d'un malade un médicament à l'aide d'une perfusion. L'efficacité de ce médicament est optimale lorsque le débit de la perfusion est stable et que la concentration du produit ne dépasse pas 450 microgrammes (µg) par cm^3, seuil au-delà duquel des effets indésirables et toxiques apparaissent.

On admet que la perfusion est correctement posée et que le seuil de concentration ne dépassera pas 450 µg *par cm*^{3}.

On relève l'évolution de la concentration de ce médicament et on obtient les résultats suivants :

Temps t_i en minutes	0	2	4	8	14	18	24
Concentration c_i en μg par cm^3	0	48	155	243	378	421	432

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

Partie A – Premier modèle

Arnufle décide de représenter les relevés sous forme d'un nuage de points.

1. Compléter le graphique en y plaçant les points associés à ce relevé.
2. À la vue de ce graphique, Arnufle décide de modéliser cette situation à l'aide d'un ajustement affine de y en t obtenu par la méthode des moindres carrés.
   Déterminer l'équation de cette droite à l'aide de votre calculatrice, puis la tracer sur le graphique.
   On trouve : $y = 19{,}02x + 49{,}40$
3. À l'aide d'une lecture graphique, en laissant apparent les « pointillés de lecture », indiquer le nombre de minutes nécessaires pour la concentration du médicament dans le sang dépasse les 300 µg par cm^3.
   On lit : à partir de la 13^{e}minute.

Partie B – Deuxième modèle

Barnabé pense que la modélisation d'Arnufle n'est pas correcte et en propose une autre.

1. D'après vous, pourquoi Barnabé doute-t-il de la pertinence du modèle d'Arnufle ?
   Ce modèle n'est pas pertinent puisqu'il prédit une concentration tendant vers $+\infty$ quand le temps augmente.
2. Barnabé pose : $y_i = \ln(450 - c_i)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   a) Compléter le tableau (donner des valeurs arrondies à 10^{-2})

b) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement affine de y en t obtenue par la méthode des moindres carrés.

À l'aide de la calculatrice et des fonctions de régression : $y = -0{,}14t + 6{,}25$

c) En déduire une relation entre la concentration c et le temps t sous la forme $c = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{kt}$.

$y = -0{,}14t + 6{,}25$ $\ln(450 - c_i) = -0{,}14t + 6{,}25$ $\mathrm{e}^{\ln(450-c_i)} = \mathrm{e}^{-0{,}14t+6{,}25}$	$450 - c_i = \mathrm{e}^{-0{,}14t} \times \mathrm{e}^{6{,}25}$ $c_i = 450 - \mathrm{e}^{-0{,}14t} \times \mathrm{e}^{6{,}25}$ $c_i = 450 - 518{,}10\,\mathrm{e}^{-0{,}14t}$

Partie C –

Finalement, Arnufle et Barnabé concluent que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 450 - 450\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$ donne une bonne approximation de la concentration du médicament au cours du temps.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}12t = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}12t} = 0$ $\lim\limits_{t\to+\infty} 450 \times \mathrm{e}^{-0{,}12t} = 0$	$\lim\limits_{t\to+\infty} 450 - 450\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} = 450$ Le graphe de la fonction f admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 450$.

2. Déterminer la dérivée de la fonction f et en déduire ses variations sur $[0\,;+\infty[$.

$f(t) = 450 - 450\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$ donc $f'(t) = 0 - 450 \times (-0{,}12)\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$ $= 54\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$	Or on sait qu'une exponentielle est toujours positive, donc quelque soit $t \in [0\,;+\infty[$ on a $f'(t) > 0$: la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. a) Résoudre sur $[0\,;+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 300$.

$f(t) > 300$ $\Leftrightarrow\ 450 - 450\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} > 300$ $\Leftrightarrow -450\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} > -150$ $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}12t} < \dfrac{1}{3}$	$\Leftrightarrow \ln\left(\mathrm{e}^{-0{,}12t}\right) < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow -0{,}12t < -\ln(3)$ $\Leftrightarrow t > \dfrac{\ln(3)}{0{,}12}$ $\Leftrightarrow t > 9{,}16$

b) En déduire, à une minute près, le temps nécessaire pour atteindre la dose efficace qui est de $300\,\mu$g par cm^3.

D'après la question précédente, il faudra 10 minutes pour atteindre la dose efficace.

4. Donner la primitive F de la fonction f qui s'annule en 0.

$f(t) = 450 - 450\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$ donc les primitives de f sont de la forme :

$\mathrm{F}(t) = 450t - 450 \times \dfrac{1}{-0{,}12}\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} + k$

$= 450t + 3750\,\mathrm{e}^{-0{,}12t} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On cherche k tel que $\mathrm{F}(0) = 0$:

$450 \times 0 + 3750\,\mathrm{e}^{-0{,}12\times 0} + k = 0$

$\Leftrightarrow 3750 \times 1 + k = 0$

$\Leftrightarrow k = -3750$

Donc la primitive cherchée est :

$\mathrm{F}(t) = 450t - 3750 + 3750\,\mathrm{e}^{-0{,}12t}$

Remarque : cette recherche de primitive permettrai de calculer la concentration moyenne du médicament dans le sang sur une période donnée.

Exercice 2 —

6 points

D'après BAC STL, Polynésie, juin 2015, exercice 4

Partie A – Croissance

Arnufle étudie la croissance d'une population de bactéries.

Il a l'impression que, dans certaines conditions particulières, la population double toutes les heures et que cette capacité de doublement ne dépend pas du nombre initial de bactéries.

Il note u_0 le nombre de bactéries au début de l'expérience (c'est à dire le nombre de bactéries à l'heure 0) Au début de l'expérience, il compte 10 000 bactéries, donc $u_0 = 10\,000$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = 2 \times u_0 = 20\,000 \qquad u_2 = 2 \times u_1 = 40\,000$

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n ; puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

on a $u_{n+1} = 2 \times u_n$: c'est donc une suite géométrique de raison 2, on sait alors que $u_n = 2^n \times u_0 = 2^n \times 20\,000$

Partie B – Une nouvelle expérience

Satisfait de ses résultats, Arnufle renouvelle l'expérience dans les mêmes conditions, avec les mêmes bactéries, mais il modifie un peu le protocole : chaque heure il ajoute un millier de bactéries du même type.

L'algorithme suivant décrit son expérience.

```
N prend la valeur 10 000
H prend la valeur 0
Tant que N < 10^5
    H prend la valeur H + 1
    N prend la valeur 2 * N + 1 000
Fin Tant que
Afficher H
```

1. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme ? Expliquer votre démarche.

À l'aide d'un tableau de variables :

H	N	$N < 10^5$
0	10 000	vrai
1	21 000	vrai
2	43 000	vrai
3	87 000	vrai
4	175 000	faux

l' algorithme va afficher 4.

2. On note V_n le nombre de bactéries à la n^e heure, n étant un entier naturel. On admet que $V_0 = 10\,000$.
   a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
   $V_{n+1} = 2V_n + 1\,000$
   b) La suite (V_n) est-elle géométrique ? Justifier la réponse.
   $\dfrac{V_1}{V_0} = \dfrac{21\,000}{10\,000} = 2{,}1$ $\qquad \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{43\,000}{21\,000} \approx 2{,}05$
   les quotients ne sont pas égaux : la suite (V_n) n'est pas géométrique.

Partie C –

Très motivé, Arnufle recommence l'expérience avec 10 000 bactéries, dans des conditions différentes et sans ajouter de bactéries à chaque heure.

Il constate alors un phénomène étrange qui laisse perplexe les plus grandes biochimistes seine-et-marnaises :

- tant que le nombre de bactéries est strictement inférieur à 40 000, le nombre double toutes les heures ;
- à partir de 40 000 bactéries, le nombre augmente seulement de 50 % toutes les heures.

1. Sachant qu'on cherche toujours le nombre d'heures nécessaires pour avoir au moins 10^5 bactéries, en vous inspirant de l'algorithme précédent, écrire un algorithme permettant de calculer ce nombre d'heures.

```
N prend la valeur 10 000
H prend la valeur 0
Tant que N < 10^5
    H prend la valeur H + 1
     Si N < 40 000
     alors N prend la valeur 2N
     sinon N prend la valeur 1,5N
     FinSi
Fin Tant que
Afficher H
```

2. Dans ces conditions, au bout de combien d'heures, le nombre de bactéries dépassera-t-il la valeur de 10^5 ?

À l'aide d'un tableau de variables :

N	H	$N < 10^5$	$N < 40\,000$
10 000	0	vrai	vrai
20 000	1	vrai	vrai
40 000	2	vrai	faux
60 000	3	vrai	faux
90 000	4	vrai	faux
135 000	5	faux	

l' algorithme va afficher 5.

Partie D – Barnabé

Barnabé, observant les derniers travaux d'Arnufle, décide d'étudier ces bactéries dans d'autres conditions.

Suite à ses travaux, il modélise le nombre de bactéries par la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 990\,000(1 - 0{,}8^n) + 10\,000$$

où u_n représente le nombre de bactéries au bout de n heures.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
   $u_0 = 10\,000$ $\qquad u_1 = 208\,000$ $\qquad u_2 = 366\,400$
2. Quel est le nombre limite de bactéries que Barnabé pourra obtenir dans ces conditions ?
   On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$
   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - 0{,}8^n) = 1$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} 990\,000(1 - 0{,}8^n) = 990\,000$
   puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 100\,000$
   Il pourra donc obtenir environ 100 000 bactéries.

Exercice 3 —

7 points

Cet exercice utilise des données fictives : ne pas utiliser vos connaissances en biotechnologie pour répondre aux questions.

Déprimée par le niveau de ses élèves et les conditions de travail qui en découlent, une professeur de biotechnologie essaye de se remonter le moral en cuisinant de délicieux macarons aux parfums variés. Évidemment, elle passe ensuite ses nuits à les déguster.

La fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1,52x - 0,21}{x^2} + 0,4\ln(x)$$

sur [0,166 ;3,333] représente sa glycémie à partir de la 10^{e}minute jusqu'à la 4^{e}heure. (Cette modélisation ne permet pas de connaître le taux des 10 premières minutes.)

Partie A – Lectures graphique

Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique en laissant apparent les « pointillés de lecture ».

1. Au bout de combien de minutes la glycémie est-elle le plus haut ? Quel est alors ce taux ?
   On lit : à environ 0,3 heures, soit 20 minutes, le taux est au plus haut, il est de 2,25 g/L
2. Pendant combien de temps (arrondi en minutes) la glycémie est-elle supérieure à 1,2 g/L ?
   On lit que cela se produit pour x de 0,18 à 1,2, soit 1,01 heure, donc 60 minutes.
3. Lire $f'(1,2)$ (arrondir au centième).
   pour un décalage en x de 0,8 unités, on se décale en y de −0,4 unité, donc la pente de la tangente se calcule par
   $f'(1,2) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-0,4}{0,8} = -0,5$

Partie B – Étude de la fonction

1. En détaillant vos calculs, vérifier que la fonction dérivée f' a pour expression sur [0,166 ;3,333] :

$$f'(x) = \frac{0,4x^2 - 1,52x + 0,42}{x^3}$$

On a : $f(x) = \dfrac{1,52x - 0,21}{x^2} + 0,4\ln(x)$

f est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)} + 0,4\ln(x)$ avec

$u(x) = 1,52x - 0,21$ $\quad u'(x) = 1,52$

$v(x) = x^2$ $\quad v'(x) = 2x$

donc $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} + 0,42 \times \dfrac{1}{x}$

$= \dfrac{1,52x^2 - (1,52x - 0,21) \times 2x}{(x^2)^2} + \dfrac{0,4}{x}$

$= \dfrac{-1,52x^2 + 0,42x}{x^4} + \dfrac{0,4x^3}{x^4}$

$= \dfrac{x(0,4x^2 - 1,52x + 0,42)}{x^4}$

$= \dfrac{0,4x^2 - 1,52x + 0,42}{x^3}$

2. Déduire de la question précédente le tableau de variations de la fonction f sur [0,166 ; 3,333].
   sur [0,166 ;3,333] $x > 0$, donc $x^3 > 0$; il faut donc trouver le signe du numérateur : $0,4x^2 - 1,52x + 0,42$.
   On cherche x tel que $0,4x^2 - 1,52x + 0,42 \geqslant 0$.
   On reconnaît un polynôme du second degré avec $a = 0,4$, $b = -1,52$ et $c = 0,42$.
   $\Delta = (-1,52)^2 - 4 \times 0,4 \times 0,42 = 1,6384$
   d'où deux racines : $\alpha = \dfrac{-(-1,52) - \sqrt{1,6384}}{2 \times 0,4} = 0,3$ et $\beta = \dfrac{-(-1,52) + \sqrt{1,6384}}{2 \times 0,4} = 3,5$
   Comme $a > 0$, on en déduit le signe de $f'(x)$ (qui est le même que celui du numérateur), puis le tableau de variations :

x	0,166	0,3	0,3333
signe de $f'(x)$	+	0	−
variations de f	↗	≈ 2,25	↘ 0,92

3. Calculer l'expression de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1,2 (arrondir les coefficients au centième).
   À l'aide de la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
   pour $a = -1,2$, on trouve $y = -0,48x + 1,77$
4. Supposons que la fonction f soit définie sur $[0,166 ; +\infty[$.
   a) Montrer que f peut s'écrire

$$f(x) = \frac{1,52}{x^2} - \frac{0,21}{x} + 0,4\ln(x)$$

$$f(x) = \frac{1{,}52x - 0{,}21}{x^2} + 0{,}4\ln(x)$$
$$= \frac{1{,}52x}{x^2} - \frac{0{,}21}{x^2} + 0{,}4\ln(x)$$
$$= \frac{1{,}52}{x} - \frac{0{,}21}{x^2} + 0{,}4\ln(x)$$

b) Calculer alors la limite de f en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1{,}52}{x} = 0$

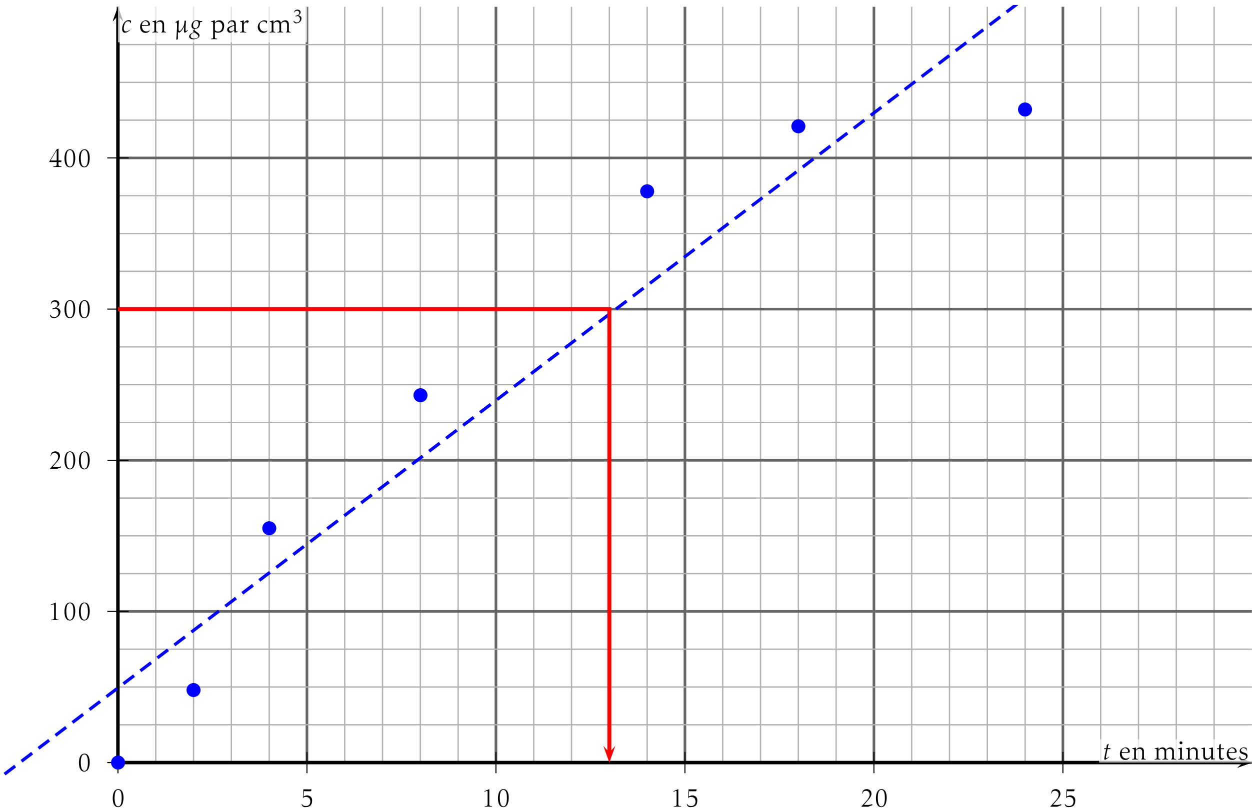
et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{0{,}21}{x^2} = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c) Que penser alors de la validité du modèle sur $[0{,}166\,;+\infty[$?

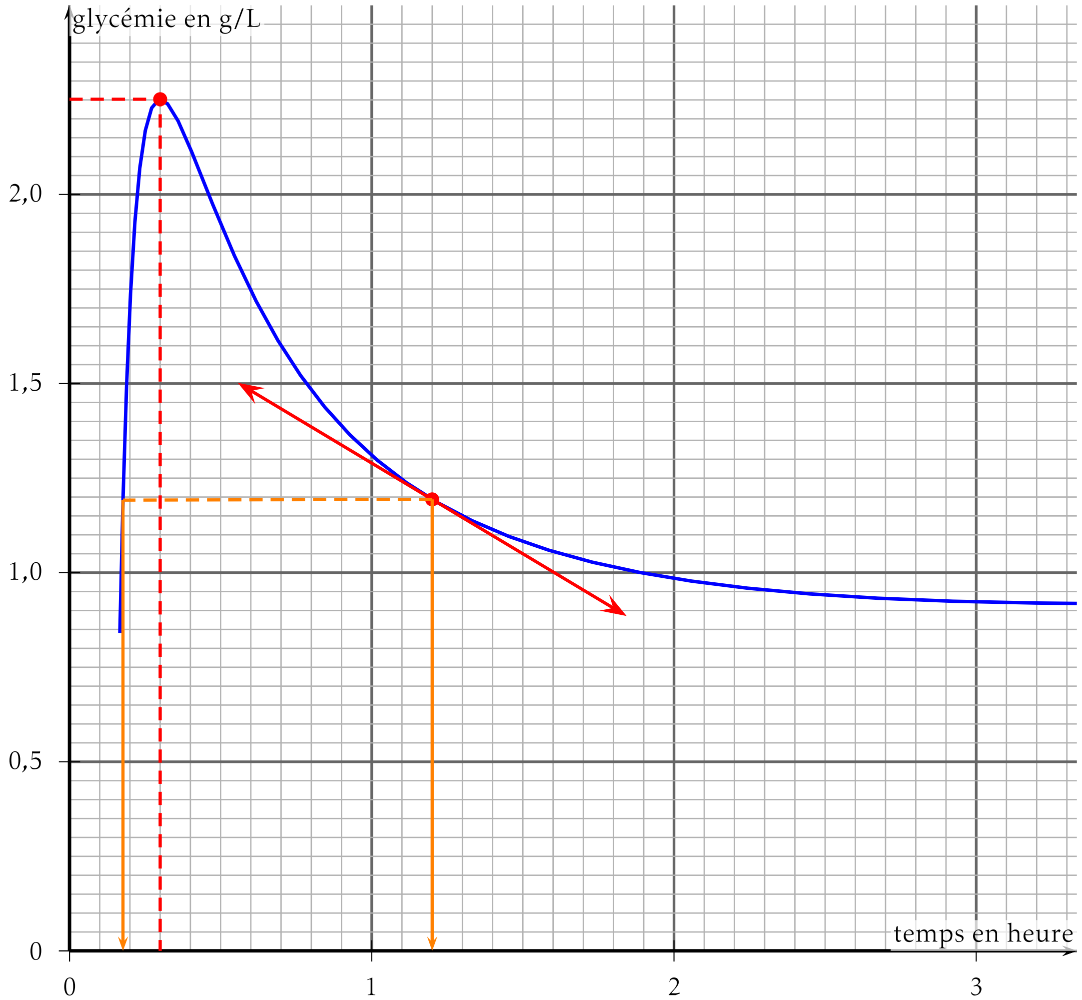
Sur cet intervalle ce modèle n'a pas sens : la glycémie ne peut pas être infinie avec le temps !



exercice 1 : nuage de points pour Arnufle

Temps t_i en minutes	0	2	4	8	14	18	24
$y_i = \ln(450 - c_i)$	6,11	6,00	5,69	5,33	4,28	3,37	2,90

Exercice 1 : tableau de Barnabé



exercice 3 : glycémie