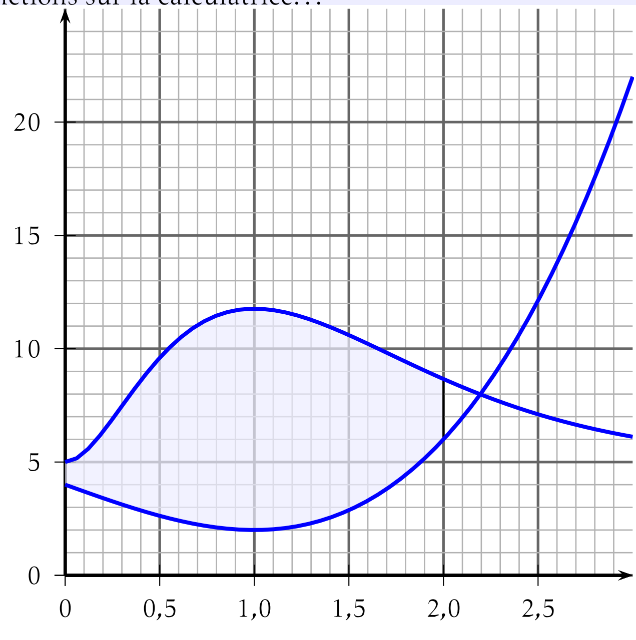
C07

Exercice 1 — Aire *10 points*

Le graphique représente les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;3]$ définies par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 4 \qquad g(x) = 50x^2\,\mathrm{e}^{-2x} + 5$$

1. Indiquer clairement sur le graphique la courbe représentative de la fonction f en justifiant votre choix.
   Pour identifier la bonne courbe, on peut calculer $f(0)$ ou $f(1)$ ou tracer les fonctions sur la calculatrice...



2. Déterminer une primitive F de la fonction f.
   $f(x) = x^3 - 3x + 4$, donc en intégrant chaque terme de la somme :
   $\mathrm{F}(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{3}{2}x^2 + 4x$

3. Vérifier que la fonction G définie sur $[0;3]$ par

$$G(x) = -6{,}25\,\mathrm{e}^{-2x} \times (4x^2 + 4x + 2) + 5x$$

est une primitive de la fonction g.

G est de la forme $u \times v + w$ qui a pour dérivée $u'v + uv' + w'$.
$G'(x) = -6{,}25 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} \times (4x^2 + 4x + 2) + -6{,}25\,\mathrm{e}^{-2x} \times (4 \times 2x + 4) + 5$
$= -6{,}25\,\mathrm{e}^{-2x} \times \left(-2 \times (4x^2 + 4x + 2) + 8x + 4\right) + 5$
$= -6{,}25\,\mathrm{e}^{-2x} \times \left(-8x^2 - 8x - 4 + 8x + 4\right) + 5$
$= -6{,}25\,\mathrm{e}^{-2x} \times \left(-8x^2\right) + 5$
$= 50x^2\,\mathrm{e}^{-2x} + 5 = g(x)$

4. Vous admettrez que la fonction h définie sur $[0;3]$ par $h(x) = g(x) - f(x)$ est positive sur $[0;2]$.
   a) Calculer $\displaystyle\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x$ sous la forme $a\,\mathrm{e}^{-4} + b$.
   b) Donner une valeur approchée au dixième.
   c) Interpréter graphiquement cette intégrale.

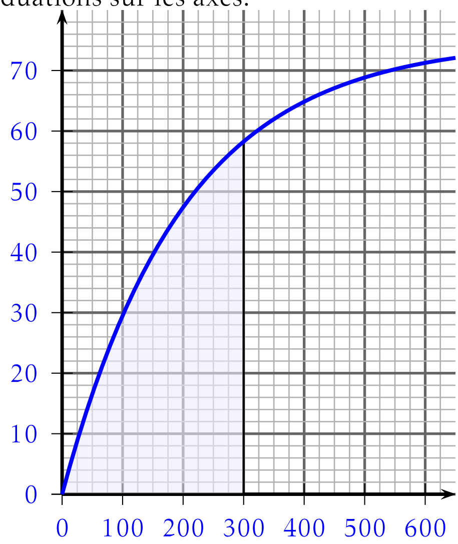
$h(x) = g(x) - f(x)$ donc $H(x) = G(x) - F(x)$
d'où $\displaystyle\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = H(2) - H(0) = G(2) - F(2) - (G(0) - F(0))$
$= -6{,}25\,\mathrm{e}^{-2\times 2} \times (4 \times 2^2 + 4 \times 2 + 2) + 5 \times 2 - \left(\dfrac{1}{4} \times 2^4 - \dfrac{3}{2} \times 2^2 + 4 \times 2\right) -$
$\left(-6{,}25\,\mathrm{e}^{-2\times 0} \times (4 \times 0^2 + 4 \times 0 + 2) + 5 \times 0\right) + \dfrac{1}{4}0^4 - \dfrac{3}{2}0^2 + 4 \times 0$
$= -6{,}25\,\mathrm{e}^{-4} \times 26 + 10 - 6 - (-6{,}25) \times 2 + 0$
$= -162{,}5\,\mathrm{e}^{-4} + 16{,}5 \approx 13{,}5$
On peut aussi simplement trouver la valeur approchée à l'aide de la calculatrice.
Graphiquement, cette intégrale représente l'aire du domaine défini par les courbes des fonctions f et g ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 2 — Antibiotique *10 points*

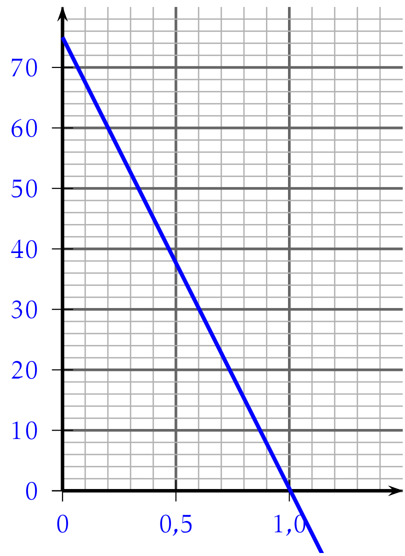
On injecte un antibiotique en perfusion. On suppose que cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion. La quantité d'antibiotique (en milligrammes) présent à tout instant t (en minutes) est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = -75\,\mathrm{e}^{-0,005t} + 75$$

1. Identifier la courbe représentative de la fonction f et indiquer quelques graduations sur les axes.



proposition A



proposition B

2. Calculer $f'(t)$ et en déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

$f(t) = -75\,\mathrm{e}^{-0,005t} + 75$ donc
$f'(t) = -75 \times (-0,005)\,\mathrm{e}^{-0,005t}$
$= 0,375\,\mathrm{e}^{-0,005t}$
Or on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(t) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3. On admet que que la quantité moyenne de l'antibiotique présente dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion est égale à

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Rappel : la valeur moyenne μ d'une fonction sur l'intervalle $[a\,;b]$ est donnée par la formule :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

a) Que vaut T ?

l'énoncé dit que le temps est minutes, donc T = 300, car 5 heures = 300 minutes.

b) Représenter sur le graphique que vous avez identifié à la question 1, $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$

c) Justifier que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(t) = 15\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 75t$$

est une primitive de la fonction f.

On dérive la fonction F : $\mathrm{F}'(t) = 15\,000 \times (-0{,}005\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 75$
$= -75\,\mathrm{e}^{-0{,}005t} + 75 = f(t)$
donc la fonction F est bien une primitive de la fonction f.

d) Calculer la quantité moyenne de l'antibiotique présente dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion (arrondir au milligramme).

$\mu = \dfrac{1}{300}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}\,t$
$= \dfrac{1}{300}\left(\mathrm{F}(300) - \mathrm{F}(0)\right)$
$= \dfrac{1}{300}\left(15\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}005\times300} + 75\times300 - 15\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}005\times0} + 75\times0\right)$
$\approx \dfrac{1}{300}\times 10\,847 \approx 36$

donc quantité moyenne d'antibiotique est de 36 milligrammes.