		bilan des compétences	11	
CAL	3	Calculer : Effectuer un calcul...		3
RAI	2	Raisonner : Utiliser les notio...		2
REP	6	Représenter : Choisir un cadre...		6
		bilan des connaissances	9	
ANT	2	Connaissances des années antér...		2
PRB02	3	Loi exponentielle : calculer p...		3
PRB03	4	Loi normale : calculs de proba...		4

	correction	20	
REP	1.A.1.a représenter proba sur graphique		1
REP	1.A.1.b lire paramètre loi expo		1
REP	1.A.2 traduire texte en calcul de proba		1
PRB02	calculer proba (loi expo)		1
PRB03	1.B.1 loi normale : calculer proba : méthode		1
PRB03	valeur de la proba (loi normale)		1
REP	1.B.2 traduire texte ne calcul de proba		1
PRB03	calculer proba (loi normale)		1
	total	8	
REP	2.1 traduire texte en calcul de proba		1
PRB03	calculer proba (loi normale)		1
ANT	2.2.a justifier loi binomiale		1
REP	2.2.b traduire texte en proba		1
CAL	calculer proba (loi binomiale)		1
ANT	2.2.c espérance loi binomiale		1
RAI	interpréter espérance		1
PRB02	2.3.a moyenne loi expo		1
CAL	calculer lambda		1
PRB02	2.3.b expression P(T>=to)		1
CAL	calculer to		1
RAI	interpréter calcul		1
	total	12	

C08 : PROBABILITÉS

NOM ....

Exercice 1 —

8 points

Antilles - Guyane, juin 2014 - exercice 4

Les parties de cet exercice sont indépendantes.
Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

Partie A –

Une entreprise agroalimentaire dispose d'un parc de machines d'ensachage toutes identiques.

La durée de vie en année d'une machine d'ensachage est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On rappelle que : $P(X \leqslant a) = 1 - e^{-\lambda a}$

Sur l'annexe, on donne la courbe de la fonction représentative f définie sur $[0 +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

1. Caractérisation de la loi.
   a) Représenter graphiquement sur l'annexe la probabilité $P(X > 20)$.
   b) Comment peut-on déduire du graphique la valeur de λ ?
   on sait que $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, donc λ est la valeur de f pour $t = 0$.
   On lit sur le graphique $\lambda = 0{,}1$

Dans cette question, on prendra $\lambda = 0{,}1$.

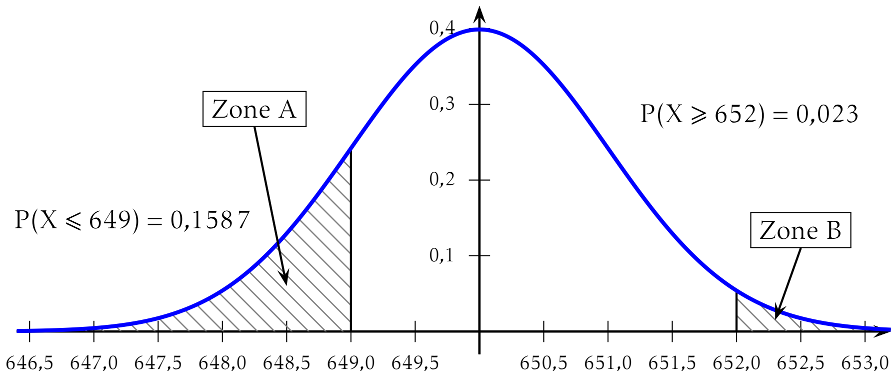
2. Quelle est la probabilité qu'une machine d'ensachage tombe en panne entre la dixième et la vingtième année ?
   X représente la durée de vie en années de la machine, si la panne se situe entre la dixième et la vingtième année, cela signifie que $10 \leqslant X \leqslant 20$.
   en utilisant les données de l'énoncé :
   $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = P(X \leqslant 20) - P(X \leqslant 10)$
   $= \left(1 - e^{-0{,}1\times 20}\right) - \left(1 - e^{-0{,}1\times 10}\right)$
   $= -e^{-0{,}1\times 20} + e^{-0{,}1\times 10} \approx 0{,}233$
   On peut aussi effectuer un calcul d'intégrale...

Partie B –

L'entreprise lance une production de paquets de préparation pour pancakes. Les paquets doivent contenir 650 g de préparation. On considère qu'un paquet est commercialisable s'il contient entre 648 g et 652 g.

On considère que la quantité Q, exprimée en grammes (g), de préparation réellement introduite dans les paquets par une machine d'ensachage suit une loi normale d'espérance $\mu = 650$ et d'écart-type $\sigma = 1$.

A l'aide d'un logiciel, on obtient les résultats suivants :



1. Déterminer la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse entre 649 g et 652 g.
   À l'aide du graphique : on sait que l'aire sous la courbe vaut 1,
   donc $P(649 \leqslant X \leqslant 652) = 1 - 0{,}1587 - 0{,}023 = 0{,}8183$
2. Calculer la probabilité qu'un paquet de préparation pour pancakes pris au hasard dans la production a pour masse moins de 648 g.
   À l'aide de la calculatrice en prenant -10^{99} pour $-\infty$, on trouve $P(X \leqslant 648) \approx 0{,}023$

Exercice 2 — *12 points*

Métropole, juin 2016, exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes. On arrondira les résultats à 10^{-3}.

Une laiterie produit des fromages, frais ou secs.

1. Pour être accepté, un fromage frais doit avoir une masse supérieure à 240 grammes.
   On appelle M la variable aléatoire qui à tout fromage frais, prélevé au hasard dans la production, associe sa masse en grammes. On suppose que M suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 5$.
   Quelle est la probabilité qu'un fromage frais prélevé au hasard dans la production soit refusé ?
   Le fromage est accepté si $M \geqslant 240$, il est donc refusé si $M < 240$. À l'aide de la calculatrice en prenant -10^{99} pour $-\infty$ on trouve : $P(M < 240) \approx 0{,}023$.

2. On suppose que 2 % des fromages frais produits ont une masse insuffisante.
   On prélève un échantillon de 150 fromages frais, pris au hasard dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
   On appelle X la variable aléatoire qui, à un échantillon de 150 fromages frais, pris au hasard dans la production, associe le nombre de fromages de masse insuffisante dans l'échantillon.
   a) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
      on répète 150 fois une expérience à 2 issues (masse suffisante ou non) ; de façon identique et indépendante (avec remise, la probabilité d'être choisi ne change pas.) ; donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 150$ et $p = 0{,}02$.
   b) Quelle est la probabilité qu'il y ait dans le prélèvement au maximum cinq fromages de masse insuffisante ?
      On cherche $P(X \leqslant 5)$. À l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}918$
   c) Déterminer l'espérance de X et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
      On sait que $E(X) = n \times p = 150 \times 0{,}02 = 3$. En moyenne, sur un grand nombre d'échantillon de 150 fromages, il y en aura 3 dont la masse sera insuffisante.

3. Pour peser ses fromages, l'entreprise fait appel à un fabricant de balances électroniques. La variable aléatoire T qui, à chaque balance choisie au hasard dans la production de ce fabricant, associe la durée (exprimée en heures) pendant laquelle la balance est réglée correctement, suit la loi exponentielle de paramètre λ, λ étant un réel. Une balance produite chez ce fabricant reste, en moyenne, correctement réglée durant 90 heures.

   a) Déterminer la valeur exacte de λ.

   T suit une loi exponentielle, on sait que $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \dfrac{1}{\lambda}$;

   donc $90 = \dfrac{1}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{90} \approx 0{,}011$

   b) On extrait au hasard une balance de la production. Déterminer le réel t_0 tel que $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant t_0) = 0{,}93$. Comment interpréter ce résultat ?

   On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant t_0) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} \leqslant t_0)$

   $= 1 - \displaystyle\int_0^{t_0} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda \times t_0} + \mathrm{e}^{-\lambda \times 0}\right)$

   $= 1 - \left(-\mathrm{e}^{-\lambda \times t_0} + 1\right) = \mathrm{e}^{-\lambda \times t_0}$

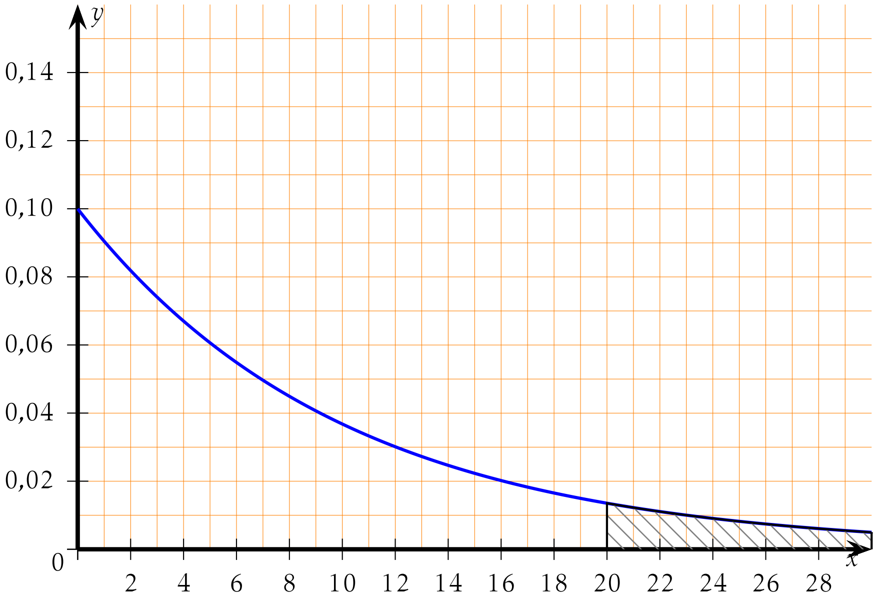
   On cherche donc t_0 tel que $0{,}93 = \mathrm{e}^{-\lambda \times t_0} \Leftrightarrow t_0 = \dfrac{\ln(0{,}93)}{-\lambda}$

   avec $\lambda = \dfrac{1}{90}$, $t_0 = -90\ln(0{,}93) \approx 6{,}5$

   cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de balances, 93 % des balances fonctionnent correctement au bout 6,5 heures.

Annexe

Courbe de la fonction f de l'exercice 1.


y
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
x