____oO° Bac Blanc - TSTL °Oo____

Sujet à rendre avec la copie

N° anonymat : . . . .

Les calculatrices scientifiques sont autorisées.

Exercice 1 —

4 points

D'après A.P.M.E.P., Polynésie, juin 2017

On injecte un médicament à un patient. Le tableau en annexe donne la concentration (en millimoles par litre) du médicament présent dans son sang à différents instants.

1. Compléter la dernière ligne du tableau en annexe 1. On donnera les valeurs arrondies à 10^{-2}.
2. Tracer, sur du papier millimétré, le nuage de points $M_i\,(t_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal d'unités à 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée.
3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement de y en t par la méthode des moindres carrés sous la forme $y = at + b$. Les valeurs de a et b seront arrondies à 10^{-3}.

   À l'aide de la calculatrice : $a \approx -0{,}196$ et $b \approx -2{,}342$.
   Une équation de la droite d'ajustement est donc :

   $$y = -0{,}196t - 2{,}342.$$

Dans la suite, on retient comme droite d'ajustement la droite Δ d'équation : $y = -0{,}2t - 2{,}3$.

4. Tracer la droite Δ sur la feuille de papier millimétré précédente.
5. Déterminer en vous aidant du graphique la concentration au bout de 11 heures. On arrondira le résultat à 10^{-3} millimoles par litre.

   On lit $\ln C \approx -4{,}45$, on en déduit que $C = e^{-4{,}45} \approx 0{,}012$ millimoles par litre.
6. Justifier que la concentration (en millimoles par litre) du médicament présent dans le sang du patient à l'instant t peut être modélisée par $C(t) = 0{,}1e^{-0{,}2t}$.

   $y = \ln C - 0{,}2t - 2{,}3$
   $\iff C = e^{-0{,}2t-2{,}3}$
   $\iff C = e^{-2{,}3} \times e^{-0{,}2t}$.
   Or $e^{-2{,}3} \approx 0{,}100$.
   D'où : $C = 0{,}1\,e^{-0{,}2t}$.
7. Au bout de combien d'heures la concentration sera-t-elle inférieure ou égale à 10^{-3} millimoles par litre ? On arrondira le résultat à l'heure.

   Il faut résoudre l'inéquation :
   $0{,}1\,e^{-0{,}2t} < 0{,}001$
   $\iff e^{-0{,}2t} < 0{,}01$
   $\iff -0{,}2t < \ln(0{,}01)$
   $\iff t > \dfrac{\ln(0{,}01)}{-0{,}2}$
   $\approx 23{,}02$.
   La concentration sera inférieure à 0,001 millimole après un peu plus de 23 heures.

Exercice 2 —

4 points

D'après A.P.M.E.P., Métropole, sept. 2016

À l'Île de La Réunion, la variété d'ananas la plus cultivée est l'ananas Victoria.

L'exportation de cette variété d'ananas vers la métropole est en plein essor. Une coopérative réunionnaise se consacre exclusivement à l'exportation d'ananas Victoria vers la métropole.

Entre 2012 et 2015, la coopérative a augmenté ses exportations de $10,5\,\%$ par an. En 2015, les exportations ont atteint 1 100 tonnes.

Le but de cet exercice est d'étudier deux modélisations différentes de l'évolution de la quantité d'ananas Victoria exportés par cette coopérative.

1. Dans cette question, on s'intéresse à une première modélisation : on suppose qu'après 2015, les exportations vont continuer à progresser de 10,5% par an. Ainsi, la situation peut être modélisée par une suite géométrique (u_n) où pour tout entier naturel n, u_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$. On a : $u_0 = 1\,100$.

a) Déterminer la quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2016.

La quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2016 est u_1.
À une augmentation de 10,5% correspond un coefficient multiplicateur de $\left(1+\dfrac{10{,}5}{100}\right) = 1{,}105$.
$u_1 = 1\,100 \times 1{,}105 \approx 1\,216$.
La quantité, arrondie à la tonne, d'ananas que la coopérative peut prévoir d'exporter en 2016 est de 1 216.

b) Déterminer en quelle année on peut prévoir que la quantité d'ananas exportés par cette coopérative dépassera 2 000 tonnes. On précisera la démarche utilisée.

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,105 et de premier terme 1 100.
On sait que $u_n = 1\,100 \times (1{,}105)^n$.
On cherche n tel que $1\,100 \times (1{,}105)^n \geqslant 2\,000$
$\iff (1{,}105)^n \geqslant \dfrac{2\,000}{1\,100}$
$\iff n \ln 1{,}105 \geqslant \ln\left(\dfrac{20}{11}\right)$
$\iff n \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{20}{11}\right)}{\ln 1{,}105} \approx 5{,}9$.
La coopérative peut estimer exporter plus de 2 000 tonnes d'ananas à partir de 2021 ($= 2015+6$).

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

La suite (u_n), est une suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme positif, donc elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

2. Dans cette question, l'exportation des ananas est modélisée par la suite (v_n), définie par : $v_0 = 1\,100$ et, pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = 0{,}7v_n + 477$ où v_n est une estimation de la quantité, en tonnes, d'ananas exportés en $2015+n$.
On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N ⟵ 3
V ⟵ 1100
Pour K variant de 1 à N
    V ⟵ 0,7 × V + 477
Fin pour
```

a) Quelle est la valeur de V à la fin de la boucle *pour* ? Interpréter ce résultat en termes d'exportation d'ananas.

À l'aide d'un tableau de valeurs :

V	N	K
1 000	3	1
1 247		2
1 349,9		3
1 421,93		

La valeur de V à la fin de la boucle est 1 421,93. La coopérative peut estimer, selon ce modèle, exporter en 2018 environ 1 422 tonnes d'ananas.

b) On dispose du tableau de valeurs suivant :

N	5	10	15	20	25	30
v_N	1 508	1 576	1 588	1 589	1 590	1 590

Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (v_n) ?
On peut conjecturer que la limite de la suite (v_n) est 1 590.

3. Entre la modélisation proposée à la question 1 et celle proposée à la question 2, laquelle privilégier ? Pourquoi ?
La limite infinie de la question 1 rend le modèle peut crédible à long terme, la modélisation de la question 2 semble plus réaliste.

Exercice 3 —

5 points

D'après A.P.M.E.P., Métropole, sept. 2016

Dans une usine du secteur de l'agroalimentaire, on teste le fonctionnement d'une machine à embouteiller de l'eau. On désigne par X la variable aléatoire qui, à toute bouteille prise au hasard dans la production, associe le volume d'eau en litres qu'elle contient. On admet que, lorsque la machine est bien réglée, X suit la loi normale d'espérance $\mu = 1{,}5$ et d'écart type $\sigma = 0{,}01$.

On arrondira les probabilités au centième.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité $P(X \leqslant 1{,}49)$.
en prenant -10^{99} pour $-\infty$, $P(X \leqslant 1{,}49) \approx 0{,}16$.

Une bouteille d'eau est conforme lorsqu'elle contient entre 1,48 et 1,52 litre d'eau.

2. On prélève au hasard une bouteille d'eau de la production.

a) À l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité que cette bouteille d'eau soit conforme aux normes de l'entreprise,
On calcule $p(1{,}48 \leqslant X \leqslant 1{,}52) \approx 0{,}95$.

b) Comment aurait-on pu obtenir ce résultat sans calculatrice ?
On remarque que $[0{,}48\,;0{,}52] = [\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]$; d'après le cours $P([\mu - 2\sigma\,;\mu + 2\sigma]) \approx 0{,}95$

3. Le directeur de l'usine souhaite que la proportion de bouteilles d'eau conformes soit égale à 97 %. Les techniciens effectuent un nouveau réglage de la machine à embouteiller et affirment que la proportion de bouteilles d'eau conformes est bien égale à 97 %. Un contrôle sur un échantillon de 500 bouteilles est effectué, pour juger de l'efficacité de ce réglage,

a) Déterminer, en arrondissant les bornes à 10^{-3}, l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la proportion de bouteilles d'eau conformes dans un échantillon de taille 500.

L'intervalle de fluctuation de cette proportion avec un niveau de confiance de 95 % est :

$$\left[p - 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,;\,p + 1{,}96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

$\left[0{,}97 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}97(1-0{,}97)}{500}}\,;\,0{,}97 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}97(1-0{,}97)}{500}}\right]$

$\approx [0{,}955\,;\,0{,}985]$

b) Parmi les 500 bouteilles de l'échantillon, on observe que 476 sont conformes.
Cette observation remet-elle en question l'efficacité du réglage ? Justifier la réponse.

La proportion de bouteilles conformes dans cet échantillon est $\frac{476}{500} = 0{,}952$.

Or 0,952 n'appartient pas à l'intervalle $[0{,}955\,;\,0{,}985]$.

Donc nous pouvons dire que cette observation remet en question l'efficacité du réglage avec un risque d'erreur de 5 %.

4. On veut mesurer la durée de bon fonctionnement de machines à embouteiller sur le point d'être livrées à l'usine.
On désigne par T la variable aléatoire qui, à toute machine prélevée au hasard parmi les machines sur le point d'être livrées, associe sa durée de vie en jours avant une défaillance. On suppose que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans cette livraison prévue n'ait pas de défaillance avant l'instant t, exprimé en jours, est $p(\mathrm{T} \geqslant t) = \mathrm{e}^{-0{,}005t}$.

a) Calculer la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne plus de 200 jours sans défaillance.

On cherche $p(\mathrm{T} \geqslant 200) = \mathrm{e}^{-0{,}005\times 200} \approx 0{,}37$

b) Déterminer le réel t pour que la probabilité qu'une machine prélevée au hasard dans la livraison prévue fonctionne moins de t jours sans défaillance soit égale à 0,2. Arrondir à l'unité.

On cherche t tel que $\mathrm{P}(\mathrm{T} < t) = 0{,}2$

$\mathrm{P}(\mathrm{T} < t) = 0{,}2$

$\iff 1 - \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant t) = 0{,}2$

$\iff \mathrm{P}(\mathrm{T} \geqslant) = 0{,}8$

$\iff \mathrm{e}^{-0{,}005t} = 0{,}8$

$\iff -0{,}005t = \ln 0{,}8$

$\iff t = \frac{\ln 0{,}8}{-0{,}005} \approx 44{,}62$

Une machine prélevée au hasard fonctionnera moins de 45 jours sans défaillance avec une probabilité d'environ 0,2.

Exercice 4 —

7 points

D'après A.P.M.E.P., Métropole, sept. 2016

On injecte un antibiotique en perfusion au rythme de 0,32 milligramme par minute. On suppose que cet antibiotique n'était pas présent dans le sang avant cette perfusion. La quantité d'antibiotique présent à tout instant est modélisée par une fonction f.

Lorsque t représente le temps écoulé, en minutes, depuis le début de la perfusion, $f(t)$ représente la quantité, en milligrammes, d'antibiotique présent dans le sang.

Partie A –

On admet que la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}004y = 0{,}32$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions y définies par $y(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a}$ $(k \in \mathbb{R})$.

ici $a = 0{,}004$ et $b = 0{,}32$ d'où $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}004t} + \dfrac{0{,}32}{0{,}004}$ c'est à dire $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80$ (avec k réel).

2. **a)** Quelle est la valeur de $f(0)$?

$f(0) = 0$ car l'antibiotique n'était pas présent dans le sang avant la perfusion.

b) En déduire une expression de $f(t)$ sur $[0\,;+\infty[$.

On sait que $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80$ (avec k réel) et que $f(0) = 0$;
$k\,\mathrm{e}^{-0{,}004\times 0} + 80 = 0 \iff k + 80 = 0 \iff k = -80$
donc $f(t) = -80\,\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80$ (avec k réel)

Partie B –

On admet que la fonction f est définie pour tout t appartenant à $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = -80\,\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80.$$

1. Calculer $f'(t)$, où f' désigne la fonction dérivée de f. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

$f(t) = -80\,\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80$,
donc $f'(t) = -80 \times (-0{,}004)\,\mathrm{e}^{0{,}004t}$
$= 0{,}32\,\mathrm{e}^{0{,}004t}$
On sait que quelque soit $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(t) > 0$; la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$

On a tracé, dans le repère donné en annexe 2, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite D, asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. Donner, à l'aide du graphique, la limite de la fonction f en $+\infty$. Cette valeur est appelée quantité limite de l'antibiotique présent dans le sang.

La courbe de la fonction f « se rapproche » de la droite d'équation $y = 80$ quand x tends vers $+\infty$: donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 80$

3. Le débit de perfusion est satisfaisant si 90 % de la quantité limite de l'antibiotique est, arrivée dans le sang au bout de 10 heures. Déterminer, de deux façons différentes, si le débit de perfusion est satisfaisant :

a) À l'aide du graphique (on laissera apparents les traits de construction utiles sur l'annexe 2 à rendre avec la copie).

90 % de la quantité limite : $0{,}9 \times 80 = 72$. On lit sur le graphique $t \approx 575$. Soit 575 minutes.
Or 10 heures = 600 minutes, donc le débit est satisfaisant.

b) Sans le graphique.

On remarque que 10 h = 600 mn et que
$f(600) = -80\,\mathrm{e}^{-0{,}004\times 600} + 80$
$\approx 72{,}74$
Comme la fonction f est croissante, cela signifie que les 90 % de l'antibiotique seront arrivés dans le sang avant la 10ᵉheure. Donc le débit est satisfaisant.

4. On admet que la quantité moyenne de l'antibiotique présente dans le sang pendant les cinq premières heures de perfusion est égale à $\dfrac{1}{300}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Démontrer que la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$\mathrm{F}(t) = 20\,000\,\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80t$$

est une primitive de f sur $[0\,;+\infty[$.

On dérive F : $F'(t) = 20\,000 \times (-0{,}004)\,e^{-0{,}004t} + 80$
$= 80\,e^{0{,}004t} + 80$
$= f(t)$
Donc F est bien une primitive de f sur $[0\,;+\infty]$.

b) En déduire la valeur de : $I = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\,dt$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.
Quelle interprétation graphique peut-on donner de l'intégrale I ?

$I = \displaystyle\int_0^{300} f(t)\,dt = F(300) - F(0)$
$= 20\,000\,e^{-0{,}004\times300} + 80 \times 300 - \left(20\,000\,e^{-0{,}004\times0} + 80 \times 0\right)$
$= 20\,000\,e^{-1{,}2} + 24\,000 - 20\,000 \times 1$
$= 20\,000\,e^{-1{,}2} + 4\,000$
$\approx 10\,023{,}9$.
Sur $[0\ ;\ 300]$, f est une fonction positive. I peut donc s'interpréter comme l'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 300$

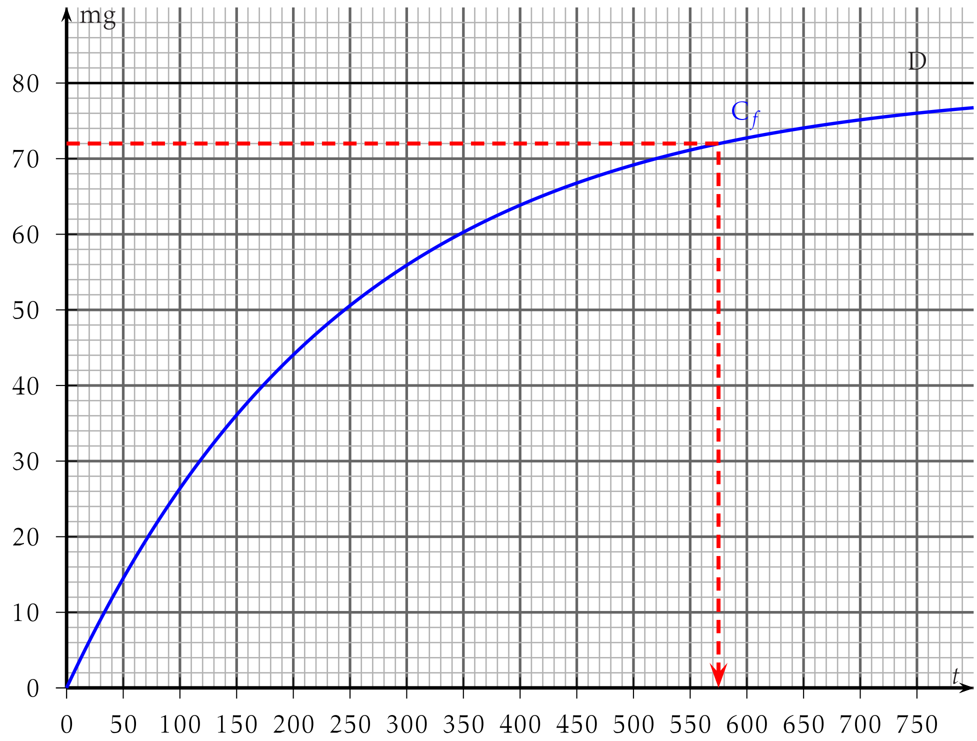
c) Déterminer une valeur approchée, au dixième de milligramme près, de la quantité moyenne de l'antibiotique présent dans le sang pendant les 5 premières heures de perfusion.

Cette question est hors programme, mais elle est tombée au bac...
On sait que 5 h = 600 mn,
donc $\bar{x} = \dfrac{1}{300-0}\displaystyle\int_0^{300} f(t)\,dt$
$= \dfrac{10\,023{,}9}{300} \approx 33{,}4$
La quantité moyenne d'antibiotique dans le sang lors des 5 premières heures est 33,4 mg.

oO° Annexe °Oo

Annexe 2 (exercice 4) : représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(t) = -80\mathrm{e}^{-0{,}004t} + 80.$$



Annexe 2 (exercice 1) :

Temps t_i en heures	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration C_i en millimoles par litre	0,082	0,065	0,058	0,045	0,040	0,030	0,024	0,021	0,019	0,013
$y_i = \ln(C_i)$	−2,50									
$y_i = \ln(C_i)$	−2,50	−2,73	−2,85	−3,1	−3,22	−3,51	−3,73	−3,86	−3,96	−4,34